UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FOGGIA

FACOLTÀ DI ECONOMIA

APPUNTI DELLE LEZIONI DI MATEMATICA FINANZIARIA

Corso M-Z

Prof. Silvana Musti

Indice

Capitolo 1

OPERAZIONI FINANZIARIE

OPERAZIONI FINANZIARIE

Scambio di capitali monetari tra soggetti diversi in tempi diversi.
Accordo prevede:

- PRESTAZIONE (soggetto "a")
- CONTROPRESTAZIONE (soggetto "b")

O.F. elementare := una prestazione e una controprestazione
O.F. complessa := piu' prestazioni e/o piu' controprestazioni

OPERAZIONI FINANZIARIE ELEMENTARI

1. O.F. di CAPITALIZZAZIONE (o PRESTITO)
2. O.F. di SCONTO

1. O.F. DI CAPITALIZZAZIONE (O PRESTITO)

"Contratto con cui un soggetto, creditore "a", cede ad un altro soggetto, debitore "b", una certa somma di denaro, capitale, per un certo periodo di tempo"

$$\text{“a”} \rightarrow (C, x) \qquad \text{“b”} \rightarrow (M, y)$$

Si deve avere $\quad (C, x) \cong (M, y) \quad$ EQUIVALENZA FINANZIARIA

$$\Rightarrow M = ? \text{ montante}$$

sicuramente: se $x < y \Rightarrow M \geq C$; se $x = y \Rightarrow M = C$ $\qquad I := M - C \qquad$ interesse

tasso effettivo di interesse relativo al periodo (x, y) $\quad \rightarrow i(x, y) := \frac{I}{C} = \frac{M-C}{C} = \frac{M}{C} - 1$

fattore di capitalizzazione $\quad \rightarrow r(x, y) := \frac{M}{C} = 1 + i(x, y)$

$$M = Cr(x, y)$$

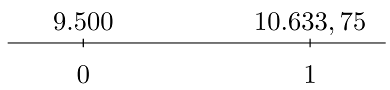
$$\begin{array}{ccccccc}
i > 0 & \Leftrightarrow & I > 0 & \Leftrightarrow & M > C & \Leftrightarrow & r > 1 \\
i = 0 & \Leftrightarrow & I = 0 & \Leftrightarrow & M = C & \Leftrightarrow & r = 1 \\
-1 < i < 0 & \Leftrightarrow & -C < I < 0 & \Leftrightarrow & 0 < M < C & \Leftrightarrow & 0 < r < 1 \\
i = -1 & \Leftrightarrow & I = -C & \Leftrightarrow & M = 0 & \Leftrightarrow & r = 0
\end{array}$$

(escludiamo $i < -1$ che significa $M < 0$)

...

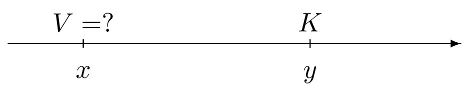
ESEMPIO

Un istituto di credito ha prestato il capitale di 9.500 euro (prestazione). Dopo un anno riscuote la somma di $10.633,75$ euro (controprestazione).
Qual è l'interesse e qual è il tasso annuo del prestito?



$$I = 10.633,75 - 9.500 = 1133,75$$
$$i(0,1) = \frac{1.133,75}{9.500} = 0,11934$$
$$\text{fattore di capitalizzazione } r(0,1) = 1 + i = 1,11934$$

2. O.F. DI SCONTO



"Contratto mediante il quale un soggetto, titolare del diritto a riscuotere ad una certa scadenza futura un capitale K, cede ad un altro soggetto questo diritto in cambio di una somma immediatamente disponibile V"

$$(V,x) \cong (K,y) \qquad \text{EQUIVALENZA FINANZIARIA}$$

$$\text{sicuramente:} \quad \begin{array}{ll} \text{se } x < y & V \leq K \\ \text{se } x = y & V = K \end{array} \qquad D := K - V \qquad \text{sconto}$$

tasso effettivo di sconto relativo al periodo (x,y) $\longrightarrow$ $$d(x,y) := \frac{D}{K} = \frac{K-V}{K} = 1 - \frac{V}{K}$$

fattore di sconto $\longrightarrow v(x,y) = \frac{V}{K} = 1 - d(x,y)$

$$V = Kv(x,y)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 < d < 1 & \Leftrightarrow & 0 < D < K & \Leftrightarrow & 0 < V < K & \Leftrightarrow & 0 < v < 1 \\
d = 1 & \Leftrightarrow & D = K & \Leftrightarrow & V = 0 & \Leftrightarrow & v = 0 \\
d = 0 & \Leftrightarrow & D = 0 & \Leftrightarrow & V = K & \Leftrightarrow & v = 1 \\
 & & & \dots & & &
\end{array}$$

ESEMPIO

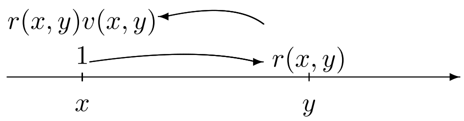
Un imprenditore presenta allo sconto (presso un istituto di credito) una cambiale di 10.633,75 euro (prestazione) con scadenza tra un anno. La somma incassata è 9.500 euro (controprestazione). Quale è lo sconto e quale è il tasso annuo di sconto applicato dalla banca?

$$D = 10.633,75 - 9.500 = 1.133,75$$
$$d(0,1) = \frac{1.133,75}{10.633,75} = 0,1066$$

fattore di sconto $\quad v(0,1) = 1 - d(0,1) = 0,8933.$

Che relazione ci aspettiamo tra

fattore di capitalizzazione $\quad r(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad$ fattore di attualizzazione $\quad v(x,y)$?



$$r(x,y) \cdot v(x,y) = 1 \quad !!$$

$$\Rightarrow \quad v(x,y) = \frac{1}{r(x,y)}$$

DA CUI OTTENIAMO:

$$1 - d(x,y) = \frac{1}{1+i(x,y)}$$

$$d(x,y) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{1+i(x,y)}} = \frac{i(x,y)}{1+i(x,y)} \qquad d(x,y) < i(x,y)$$

o, analogamente

$$1 + i(x,y) = \frac{1}{1-d(x,y)} \quad \Rightarrow \quad i(x,y) = \frac{d(x,y)}{1-d(x,y)}$$

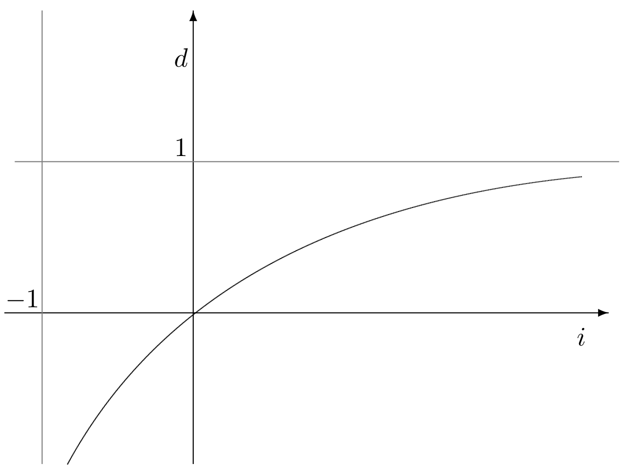
Grafico di $d = \frac{i}{1+i}$

$$i = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0$$

$$d' = \frac{1+i-i}{(1+i)^2} = \frac{1}{(1+i)^2} > 0$$

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{i}{1+i} = 1$$

$$\lim_{i \to -1} \frac{i}{1+i} = -\infty$$

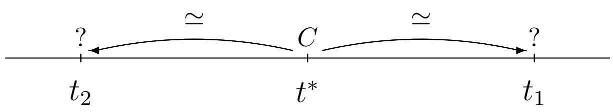


OPERAZIONI FINANZIARIE COMPLESSE

soggetto “a”→ 1 o + prestazioni

soggetto "b"→ + prestazioni

ORA, BISOGNA AFFRONTARE IL PROBLEMA:
COME VALUTARE UN CAPITALE AD UN TEMPO DIVERSO DALLA DISPONIBILITA'?



si tratta di trovare una funzione f

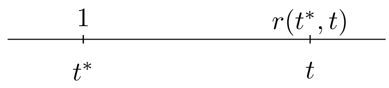
$$\left.\begin{array}{c} C \\ t^* \\ t \end{array}\right\} f \to f(C, t^*, t)$$

ASSIOMI di "*buon senso*"

1. $f(C_1 + C_2, t^*, t) = f(C_1, t^*, t) + f(C_2, t^*, t) \qquad \forall t$
2. se $t_2 > t_1 \qquad f(C, t^*, t_2) > f(C, t^*, t_1)$
3. se $t = t^* \qquad f(C, t^*, t) = C$

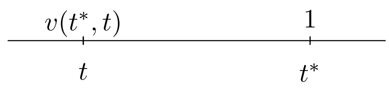
se vale la 1. $\Rightarrow$
$f(C, t^*, t) = f(1, t^*, t) + f(1, t^*, t) + ... + f(1, t^*, t) = Cf(1, t^*, t)$
definiamo $f(t^*, t) = f(1, t^*, t)$
$\Rightarrow f(C, t^*, t) = Cf(t^*, t)$
2. $\Rightarrow \frac{\partial f(t^*,t)}{\partial t} \geq 0$
3. $f(t^*, t^*) = 1$

se $t \geq t^*$



$f(t^*, t)$ è una LEGGE DI CAPITALIZZAZIONE e la indichiamo con $r(t^*, t)$

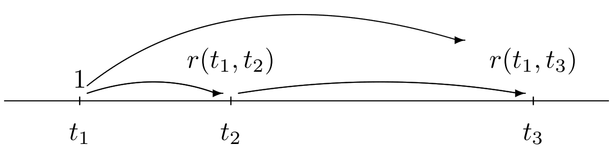
se $t \leq t^*$



$f(t^*, t)$ è una LEGGE DI SCONTO e la indichiamo con $v(t^*, t)$

DEF: la legge di capitalizzazione (sconto) è una funzione che serve a fornire il valore di un capitale ad un certo tempo non anteriore (non posteriore) alla sua disponibilità.
Se $r(t^*, t)v(t^*, t) = 1 \Rightarrow$ LE LEGGI SONO CONIUGATE

1. *scindibilità*

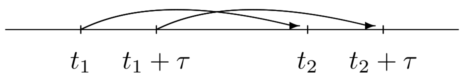


$r(t_1, t_3) = r(t_1, t_2)r(t_2, t_3)$
se vale per la legge di capitalizzazione, vale anche per quella di sconto.

Infatti passando ai reciproci

$$\frac{1}{r(t_1,t_3)} = \frac{1}{r(t_1,t_2)}\frac{1}{r(t_2,t_3)} \qquad \Rightarrow \qquad v(t_1,t_3) = v(t_1,t_2)v(t_2,t_3)$$

2. *uniformità rispetto al tempo*



$r(t_1,t_2) = r(t_1+\tau, t_2+\tau)$
passando ai reciproci si vede che vale anche per le leggi di sconto.

N.B. Se vale l'uniformità rispetto al tempo, allora possiamo considerare solo il lasso si tempo

$$t_2 - t_1 = t$$

e fare diventare le leggi funzioni di una sola variabile

$$r(t_1,t_2) \Rightarrow r(t)$$
$$v(t_1,t_2) \Rightarrow v(t)$$

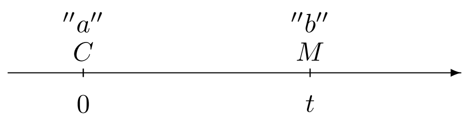
ESEMPIO

Per quali valori del parametro k la funzione

$$f(t) = 1 + (k-2)t^k$$

è idonea a rappresentare un fattore di montante?
$f(0) = 1$
$f'(t) = (k-2)kt^{k-1} \qquad k(k-2) \geq 0 \Rightarrow k \leq 0, k \geq 2.$

INTERESSE ANTICIPATO



$M - C = I$

L'operazione si può vedere in due modi:

1. prestito da "a" a "b" della somma C in cambio della somma $M = C + I$, dove I è l'interesse

   $i = \frac{I}{C}$ tasso di remunerazione (posticipato)

2. prestito da "a" a "b" della somma M, con pagamento anticipato dell'interesse I, per cui la somma decurtata dell'interesse diventa:

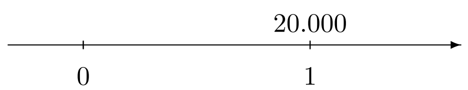
   $$C = M - I$$

   $$i^{(a)} = \frac{I}{M} \qquad \text{tasso di interesse (anticipato)}$$

   $$= \frac{M-C}{M} = 1 - \frac{C}{M} \qquad \text{che è } d \text{ (tasso di sconto)}$$

   PER CUI:
   un'operazione di prestito ad interessi anticipati può essere considerata come un'operazione di anticipazione o sconto.

ESEMPIO 1
Una banca presta il capitale di 20.000 euro. Al debitore viene chiesto il pagamento anticipato degli interessi per 2.145 euro e il rimborso dopo un anno della somma ricevuta. Qual' è il tasso di interesse anticipato del prestito?



$$i^{(a)} = \frac{2.145}{20.000} = 0,10725$$

$$\dots$$

ESEMPIO 2

Un'operatore, che si propone di prendere a prestito per un anno il capitale C da investire in un'operazione che rende il 21%, può scegliere se pagare gli interessi posticipatamente al tasso del 12% o anticipatamente al tasso del 10%. Qual'è l'alternativa più conveniente?

POST:

$$\begin{array}{ccl} +C & -C(1+0,12) & FINANZIAMENTO \\ -C & +C(1+0,21) & INVESTIMENTO \\ \hline 0 & 1 & \end{array}$$

$$C(1+0,21) - C(1+0,12) = 0,09C$$

ANT:

$$\begin{array}{cc} +C(1-0,1) & -C \\ -C(1+0,1) & +C(1+0,1)(1+0,21) \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

$$C(1-0,1)(1+0,21) - C = 0,089C$$

$\Rightarrow$ *CONVIENE PAGAMENTO INTERESSI POSTICIPATI*

TASSO DI INTERESSE

$i(x,y)$ compenso che spetta a chi mette a disposizione 1 unità di capitale per il periodo di tempo (x,y) (unità di tempo)

Se le leggi sono traslabili (o uniformi rispetto al tempo) allora si può considerare solo il lasso di tempo $y - x$.

$y - x = 1$ anno	i	tasso annuo
$y - x = 1$ semestre	i_2	tasso semestrale
$y - x = 1$ quadrimestre	i_3	tasso quadrimestrale
$y - x = 1$ trimestre	i_4	tasso trimestrale
$y - x = 1$ bimestre	i_6	tasso bimestrale

REGIME DI CAPITALIZZAZIONE:= insieme di convenzioni che regolano l'operazione finanziaria e permettono di determinare le leggi di capitalizzazione e di sconto con cui si effettuano le valutazioni.

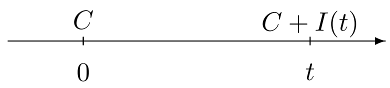
$$\Rightarrow \begin{array}{c} RIS \\ RIA \\ RIC \end{array}$$

Capitolo 2

RIS - REGIME DELL'INTERESSE SEMPLICE

DEF: Regime nel quale l'interesse prodotto da una operazione di investimento è direttamente proporzionale al capitale investito e alla durata dell'operazione.

$$I(t) = \alpha C t \qquad\qquad \alpha \in \mathbb{R}^+$$



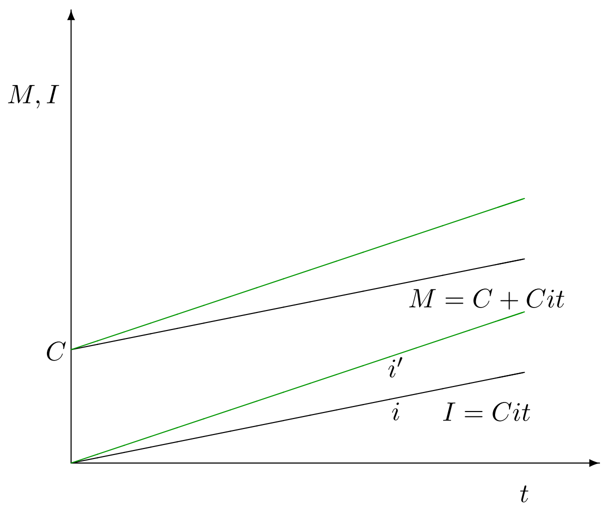
Se $C = 1$, $t = 1$ $\qquad I(1) = \alpha \qquad$ per cui α è l'interesse prodotto da 1 euro in una unità di tempo $\Rightarrow \alpha$ è il tasso di interesse riferito all'unità temporale in cui è espresso t

$$I(t) = iCt$$

Otteniamo quindi la legge di capitalizzazione:

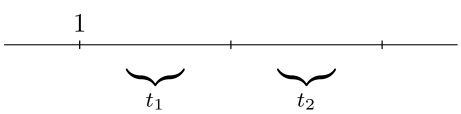
$$M(t) = C + I(t) = C + Cit = C(1 + it)$$
$$\Rightarrow r(t) = 1 + it$$

Nel RIS si ha relazione lineare tra montante e tempo di impiego.



Proprietà?

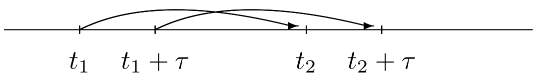
1. Scindibilità?



$$\begin{aligned} 1 + i(t_1 + t_2) =^? &\quad (1 + it_1)(1 + it_2) \\ = &\quad 1 + it_2 + it_1 + i^2 t_1 t_2 \\ = &\quad 1 + i(t_1 + t_2) + i^2 t_1 t_2 > 1 + i(t_1 + t_2) \end{aligned}$$

NON E' SCINDIBILE

2. Omogeneità?

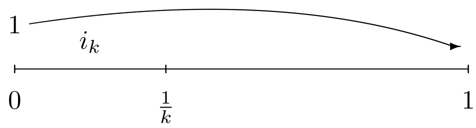


$$\begin{aligned} 1+i(t_2-t_1) &\overset{?}{=} 1+i(t_2+\tau-(t_1+\tau)) \\ &= 1+i(t_2+\tau-t_1-\tau) \\ &= 1+i(t_2-t_1) \end{aligned}$$

E' OMOGENEA RISPETTO AL TEMPO

TASSI EQUIVALENTI

Def: Due tassi sono equivalenti se applicati allo stesso capitale per lo stesso periodo di tempo generano lo stesso montante.
RELAZIONE DI EQUIVALENZA TRA TASSI NEL RIS

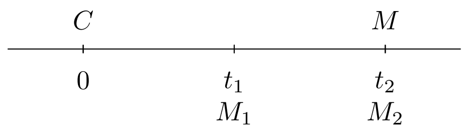


$$1+i = 1+i_k k \qquad \Rightarrow \qquad i_k = \frac{i}{k}$$

$$i_2 = \frac{i}{2} \qquad i_3 = \frac{i}{3} \qquad i_4 = \frac{i}{4} \qquad ... \qquad i_{12} = \frac{i}{12} \qquad ...$$

$$...$$

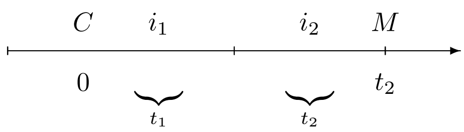
Proprietà del RIS: gli interessi maturati si rendono disponibili solo alla fine dell'operazione per cui l'operatore non ha vantaggi ad utilizzare il RIS se non per periodi brevi. Conviene quindi piuttosto che fare una operazione per un periodo lungo, disinvestire e reinvestire nuovamente.



$$M = C[1 + i(t_1 + t_2)] = C + Cit_1 + Cit_2$$

$$M_2 = \underbrace{C(1 + it_1)}_{M_1}(1 + it_2) = C + Cit_2 + Cit_1 + Ci^2t_1t_2 > M$$

se durante il periodo di impiego cambia il tasso?



$$M = C + Ci_1t_1 + Ci_2t_2 = C[1 + i_1t_1 + i_2t_2]$$

...

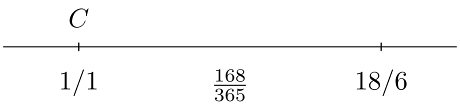
ESEMPIO

Il capitale di 10.000 euro viene impiegato per 5 mesi al tasso annuo 0,096. Determinare il montante e l'interesse.

$$M = 10.000(1 + 0,096\frac{5}{12}) = 10.400 \qquad I = 400$$

...

Il primo gennaio viene impiegato un capitale al tasso annuo 0,09 fino al 18 giugno del medesimo anno.
Sapendo che tale capitale ha prodotto un interesse di 5.000, determinare il montante.



$$I = 5.000$$
$$C \cdot 0,09 \cdot \frac{168}{365} = 5.000 \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{5.000}{0,09 \cdot \frac{168}{365}} = 120.701,058$$
$$M = 5.000 + 120.701,058 = 125.701,058$$

LEGGE DI SCONTO NEL RIS [SCONTO RAZIONALE]

$v(t) = \dfrac{1}{r(t)} = \dfrac{1}{1+it}$ relazione iperbolica tra valore scontato e periodo t

Studio della funzione $v(t)$

$t = 0 \Rightarrow v(0) = 1$ $\qquad t \neq -\frac{1}{i}$

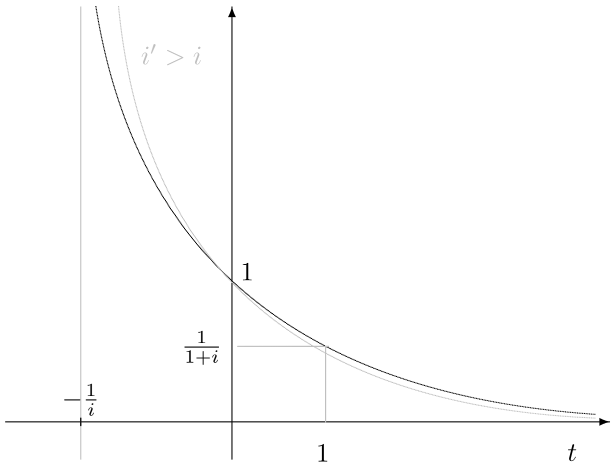
$t = 1 \Rightarrow v(1) = \frac{1}{1+i}$

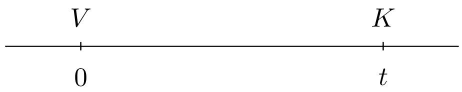
$v'(t) = \frac{-i}{(1+it)^2} < 0$

$v''(t) = -i\left[-\frac{1}{(1+it)^4}2(1+it)i\right] = \frac{2i^2}{(1+it)^3} > 0$

$\lim_{t\to+\infty} v(t) = 0$

$\lim_{t\to -\frac{1}{i}^+} v(t) = +\infty$





$V = Kv(t) = \frac{K}{1+it}$
Sconto: $D(t) = K - V = K - \frac{K}{1+it} = K\left[\frac{1+it-1}{1+it}\right] = K\frac{it}{1+it}$
Tasso di sconto: $d(t) = \frac{D(t)}{K} = \frac{it}{1+it}$

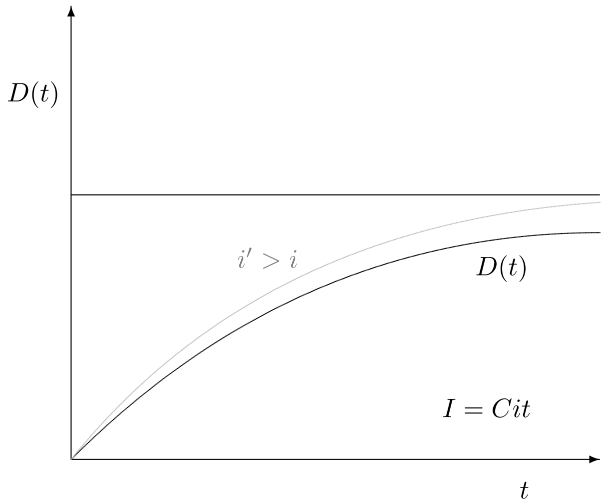
$$\text{se } t = 1 \quad d = \frac{i}{1+i} \qquad \Rightarrow i = \frac{d}{1-d}$$

per cui il valore attuale in funzione del tasso di sconto diventa:
$V = \frac{K}{1+it} = \frac{K}{1+\frac{d}{1-d}t} = \frac{K(1-d)}{1-d+dt} = \frac{K(1-d)}{1+d(t-1)}$
Studio grafico della funzione di sconto $D(t) = K\frac{it}{1+it}$

$$t = 0 \Rightarrow D(t) = 0 \qquad \lim_{t\to\infty} D(t) = K$$

$$D'(t) = K\frac{i(1+it) - i^2t}{(1+it)^2} = K\frac{i + i^2t - i^2t}{(1+it)^2} = K\frac{i}{(1+it)^2} > 0$$

$$D''(t) = K\left[-\frac{i}{(1+it)^4}2(1+it)i\right] = K\left[-\frac{2i^2}{(1+it)^3}\right] < 0$$



ESERCIZI

Sessanta giorni dopo aver ottenuto un prestito, una persona lo estingue pagando complessivamente (per capitale e interessi) 2.500 euro. Quale somma è stata presa a prestito se il tasso annuo di interesse corrisposto è il 9%?

$$\begin{array}{ccc} V = ? & & 2.500 \\ \hline 0 & & 60gg \end{array}$$

$$V = \frac{2.500}{1 + 0,09\frac{60}{365}} = 2.463,55$$

...

Quanto tempo occorre affinchè un capitale di 4.500 euro, impiegato al tasso (annuo) 0,06 produca un interesse pari a 90 euro?

$$\begin{array}{ccc} 4.500 & & 4.500 + 90 \\ \hline 0 & & t = ? \end{array}$$

$I(t) = Cit \qquad 90 = 4.500 \cdot 0,06 \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{3} \qquad$ 4 mesi

...

Dopo quanto tempo un capitale di 3.800 euro, investito al tasso semestrale del 4%, genera un montante di 4.000?

$$\begin{array}{ccc} 3.800 & & 4.000 \\ \hline 0 & & t \end{array}$$

$3.800(1+0,04t) = 4.000 \qquad t = \left[\frac{4.000}{3.800} - 1\right]\frac{1}{0{,}04} = 1,31579 \quad semestri$

$6 mesi$

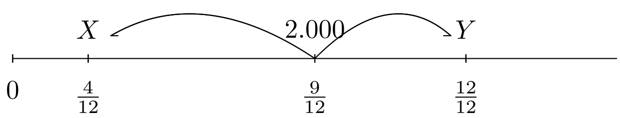
$0,31579 \times 6 = 1,89474 \qquad 1\, mese$

$0,89474 \times 30 = 26,8422 \qquad 27\, giorni$

$7 \quad mesi \quad e \quad 27 \quad giorni$

...

Un debito di 2.000 euro giungerà a scadenza fra 9 mesi. Determinare il valore fra 4 mesi e fra un anno, al tasso di interesse (semplice) del 10,50%.

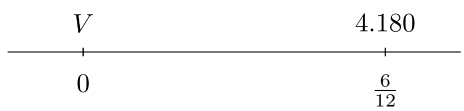


$$X = \frac{2.000}{1+0,105\frac{9-4}{12}} = 1.916,17$$

$$Y = 2.000\left(1+0,105\frac{12-9}{12}\right) = 2.052,5$$

...

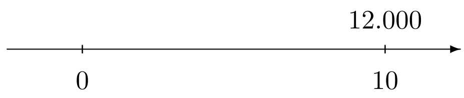
Determinare il valore attuale razionale di un debito di 4.180 euro che scade fra 6 mesi, al tasso di interesse del 9%.
Determinare inoltre lo sconto razionale.



$$V = \frac{4.180}{1+0,09\frac{6}{12}} = 4.000 \qquad D = 4.180 - 4.000 = 180$$

...

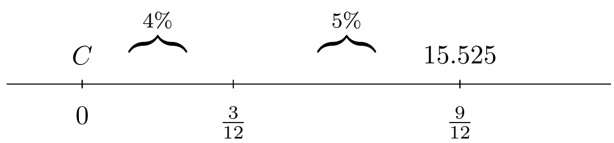
Determinare a quale tasso annuo lo sconto (razionale) calcolato su un capitale di 12.000 euro per 10 mesi risulta uguale a 689,92 euro.



$$12.000 - \frac{12.000}{1+i\frac{10}{12}} = 689,92 \quad \Rightarrow \quad i = 0,0732$$

...

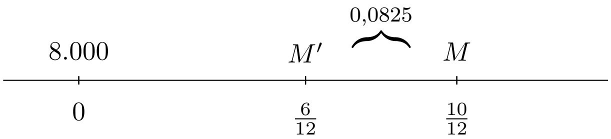
Un capitale, depositato in un libretto di risparmio, ha prodotto dopo 9 mesi, un montante di 15.525 euro. Determinare l'ammontare sapendo che per i primi 3 mesi il tasso corrisposto dalla banca è stato del 4 % e per i successivi 6 mesi del 5%.



$C\left[1+0,04\frac{3}{12}+0,05\frac{6}{12}\right] = 15.525^{?} \qquad C = 15.000$

...

Tizio ha ottenuto da una banca un prestito di 8.000 euro, al tasso annuo 0,093, impegnandosi a restituire il montante dopo 10 mesi. Dopo 6 mesi egli propone alla banca, che accetta purchè non gliene derivi alcun danno, di estinguere anticipatamente l'operazione. Quale somma dovrà essere versata a saldo dal Sig. Tizio se il tasso di mercato, al momento dell'estinzione è 0,0825?



$M = 8.000\left(1 + 0,093\frac{10}{12}\right) = 8.620$
$M'\left(1 + 0,0825\frac{4}{12}\right) = 8.620 \quad \Rightarrow M' = 8.389,29$

Capitolo 3

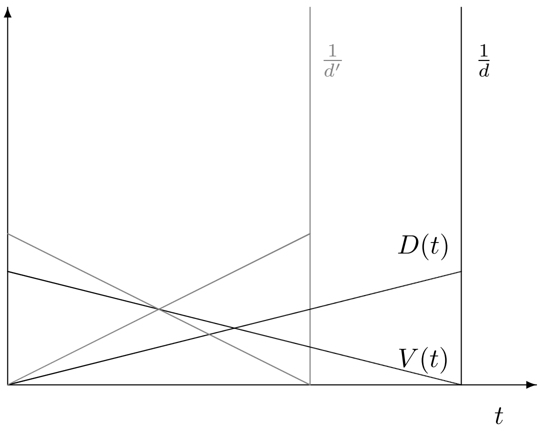
RIA - REGIME DELL'INTERESSE ANTICIPATO

DEF: Regime nel quale lo sconto prodotto in una operazione di attualizzazione è direttamente proporzionale al capitale da scontare e alla durata dell'operazione.
$D(t) = Kdt$
$V = K - Kdt = K(1 - dt) \qquad 1 - dt \geq 0 \qquad t \leq \frac{1}{d}$
fattore di sconto $v(t) = 1 - dt$

$$\text{Se} \qquad t = \frac{1}{d} \qquad \begin{aligned} D(t) &= K \\ V(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Se} \qquad t = 0 \qquad \begin{aligned} D(t) &= 0 \\ V(t) &= K \end{aligned}$$

$$d' > d$$



LEGGE DI CAPITALIZZAZIONE CONIUGATA

$$r(t) = \frac{1}{v(t)} = \frac{1}{1 - dt}$$

$$d = \frac{i}{1+i} \quad \Rightarrow \quad r(t) = \frac{1}{1 - \frac{i}{1+i}t} = \frac{1+i}{1+i-it} = \frac{1+i}{1-i(t-1)}$$

Ricaviamo le funzioni MONTANTE ed INTERESSE in funzione del tasso di interesse i e di t

$$M(t) = Cr(t) = C\frac{1+i}{1-i(t-1)}$$

$$i(t) = r(t) - 1 = \frac{1}{1-dt} - 1 = \frac{dt}{1-dt} = \frac{\frac{i}{1+i}t}{1-\frac{i}{1+i}t} = \frac{it}{1+i-it} = \frac{it}{1-(t-1)i}$$

$$I(t) = Ci(t) = \frac{Cit}{1-(t-1)i}$$

$$M'(t) = -C(1+i)\frac{1}{(1-i(t-1))^2}(-i) > 0$$

$$I' = Ci\frac{1-(t-1)i+it}{(1-i(t-1))^2} = Ci\frac{1-ti+i+it}{(1-i(t-1))^2} = Ci\frac{1+i}{(1-i(t-1))^2} > 0$$

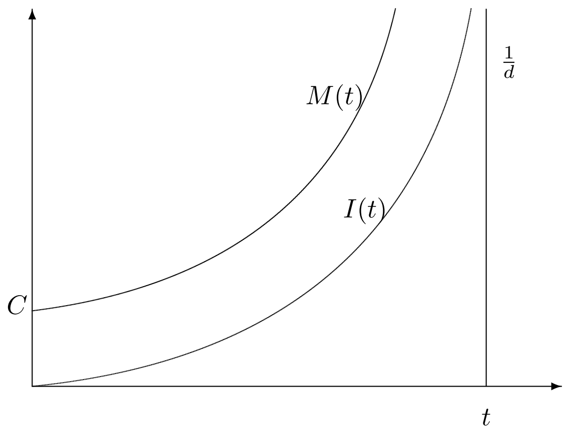
$$1 - i(t-1) \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad t \neq \frac{1+i}{i}$$

$$\lim_{t \to \frac{1+i}{i}^-} M(t) = +\infty$$

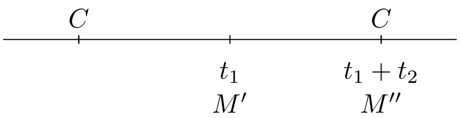
$$\lim_{t \to \frac{1+i}{i}^-} I(t) = +\infty$$

$$t = 0 \qquad M(t) = C$$

$$I(t) = 0$$



Il RIA non è scindibile.
Dimostriamolo facendo vedere che non conviene la capitalizzazione intermedia.



$$M = C\frac{1}{1-d(t_1+t_2)} = C\frac{1}{1-dt_1-dt_2}$$
$$M' = \frac{C}{1-dt_1}$$
$$M'' = \frac{C}{1-dt_1}\frac{1}{1-dt_2} = C\frac{1}{1-dt_2-dt_1+d^2t_1t_2}$$
$$M'' < M$$

...

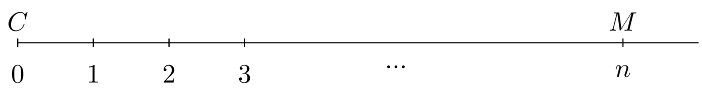
Un operatore che prende a prestito 1.500 euro per 5 mesi da una banca che gli applica un tasso di sconto del 9,5 %. Calcolare lo sconto e la somma di denaro che l'operatore riceve. Determinare inoltre l'ammontare del prestito che egli dovrebbe chiedere se volesse incassare 1.500 euro.

$$V = 1.500(1-0,095\frac{5}{12}) = 1.440,62 \qquad D = 1.500 - 1.440,62 = 59,38$$
$$M(1-0,095\frac{5}{12}) = 1.500 \quad \Rightarrow \quad M = 1.561,82$$

Capitolo 4

RIC - REGIME AD INTERESSE COMPOSTO

DEF: Regime in cui al termine dell'unità di tempo l'interesse prodotto contribuisce ad incrementare il capitale su cui vengono calcolati gli interessi nell'unità di tempo successiva.

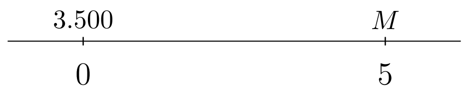


$$\begin{array}{ll}
\text{tempo 1:} & C_1 = C + Ci = C(1+i) \\
\text{tempo 2:} & C_2 = C_1(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2 \\
\text{tempo 3:} & C_3 = C_2(1+i) = C(1+i)^2(1+i) = C(1+i)^3 \\
\vdots & \vdots \\
\text{tempo n:} & C_n = C_{n-1}(1+i) = C(1+i)^{n-1} = C(1+i)^n
\end{array}$$

Quindi il FATTORE DI MONTANTE per un tempo pari a n periodi è $(1+i)^n$.
Il MONTANTE è $M = C(1+i)^n$.
L'INTERESSE è $I = M - C = C(1+i)^n - C = C[(1+i)^n - 1]$.

ESEMPIO

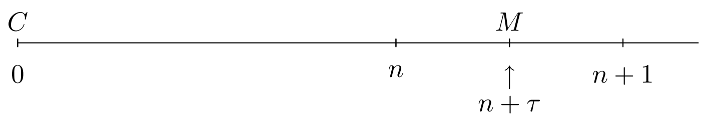
Il capitale di 3.500 euro viene impiegato al tasso $i = 0,08$ per 5 anni. Calcolare il montante e l'interesse prodotto.



$$M = 3.500(1 + 0,08)^5 = 3.500 \cdot 1,46933 = 5.142,655$$

$$I = M - C = C(1 + i)^5 - C = C[(1 + i)^5 - 1] = 3.500[(1 + i)^5 - 1] = 1.642,655.$$

E SE LA DURATA NON E' UN MULTIPLO DEL PERIODO DEL TASSO?



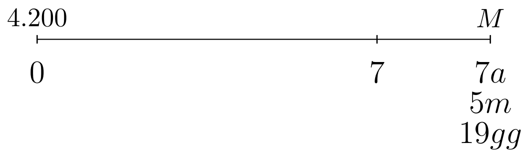
n è il numero intero di periodi

τ è la frazione di periodo $0 < \tau < 1$

1. CONVENZIONE LINEARE $M = C(1 + i)^n(1 + i\tau)$
2. CONVENZONE ESPONENZIALE $M = C(1 + i)^{n+\tau}$

ESEMPIO

Il capitale di 4.200 euro viene impiegato al tasso i=0,06 per 7 anni, 5 mesi e 19 gg. Calcolare il montante applicando sia la convenzione lineare che la convenzione esponenziale.



1. $M = 4.200(1+0,06)^7(1+0,06[\frac{5}{12}+\frac{19}{360})] = 6.493,146$

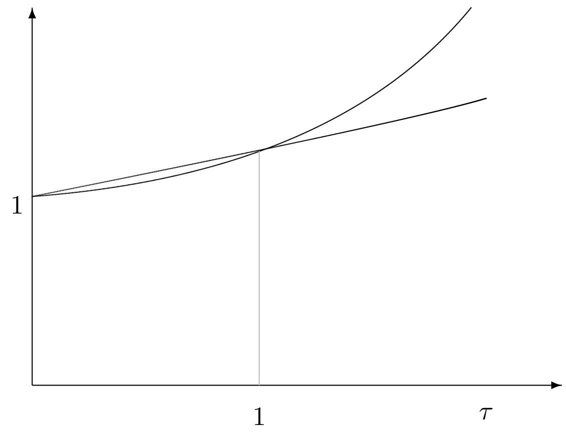
2. $M = 4.200(1+0,06)^{7+\frac{5}{12}+\frac{19}{360}} = 6.490,386$

CONFRONTO TRA CONVENZIONE LINEARE E CONVENZIONE ESPONENZIALE

$$C(1+i)^n(1+i)^\tau < C(1+i)^n(1+i\tau)$$
$$(1+i)^\tau < (1+i\tau)$$

$$\begin{array}{rl} \tau = 0 & \tau = 1 \\ (1+i)^\tau = 1 & (1+i)^\tau = 1+i \\ 1+i\tau = 1 & 1+i\tau = 1+i \end{array}$$

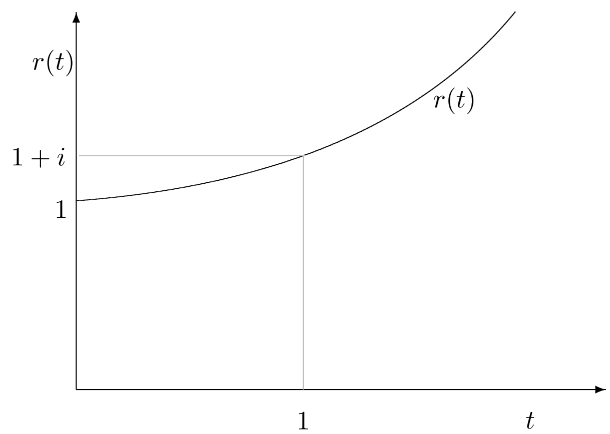
$$0 < \tau < 1$$

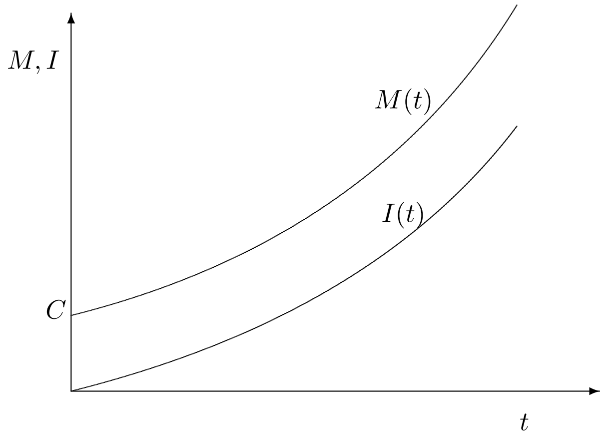


Se non diversamente specificato, il calcolo del montante viene effettuato secondo la convenzione esponenziale

$$M = C(1+i)^t \quad \forall t > 0$$

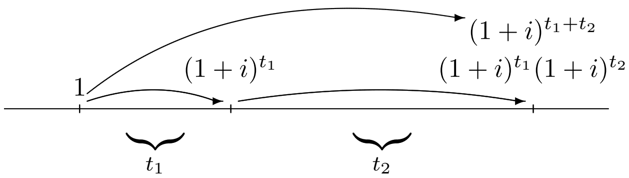
$$\begin{aligned} r(t) &= (1+i)^t \\ M(t) &= C(1+i)^t \\ I(t) &= C[(1+i)^t - 1] \end{aligned}$$



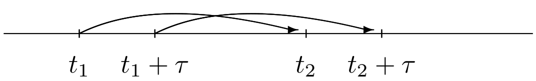


Proprietà

SCINDIBILITA'

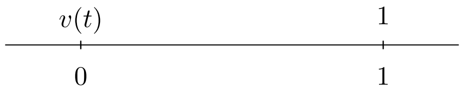


UNIFORMITA'



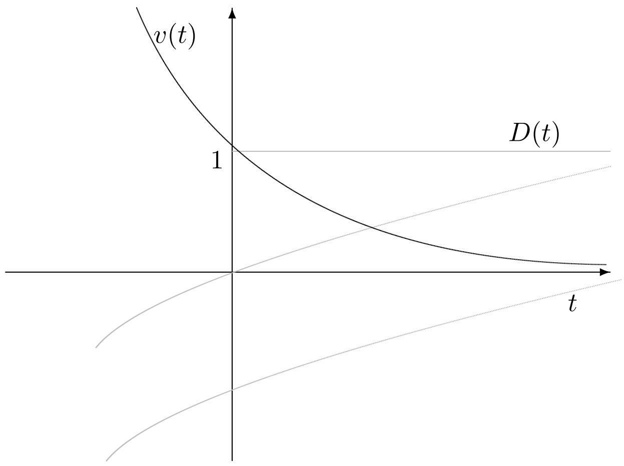
$$(1+i)^{t_2-t_1} = (1+i)^{t_2+\tau-(t_1+\tau)}$$

LEGGE DI SCONTO NEL RIC



$$v(t) = \frac{1}{r(t)} = \frac{1}{(1+i)^t} = (1+i)^{-t}$$

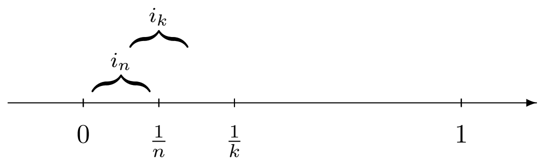
$$\text{Sconto} \quad D(t) = 1 - (1+i)^{-t} = 1 - v(t)$$



TASSI EQUIVALENTI NEL RIC

i_n tasso relativo ad un $\frac{1}{n}$ di anno

i_k tasso relativo ad un $\frac{1}{k}$ di anno



$$i_n \approx i_k : (1+i_n)^n = (1+i_k)^k \Rightarrow i_k = (1+i_n)^{\frac{n}{k}} - 1$$

i tasso annuo

$$(1+i_k)^k = 1+i \quad \Rightarrow \quad i = (1+i_k)^k - 1$$
$$i_k = (1+i)^{\frac{1}{k}} - 1$$

ESEMPIO

Determinare il tasso quadrimestrale i_3 equivalente al tasso annuo del 9%.

$$(1+i_3)^3 = 1+0,09 \quad \Rightarrow i_3 = 1,09^{\frac{1}{3}} - 1 = 0,02914.$$

Determinare il tasso bimestrale equivalente al tasso trimestrale del 4%.

$$(1+i_6)^6 = (1+i_4)^4$$
$$i_6 = (1+i_4)^{\frac{4}{6}} - 1 = (1,04)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0,026492.$$

CONFRONTO FRA I TRE REGIMI $\begin{cases} RIS \\ RIA \\ RIC \end{cases}$

FATTORI DI CAPITALIZZAZIONE:

1. $RIS : r_{RIS}(t) = 1 + it$
2. $RIA : r_{RIA}(t) = \frac{1}{1-dt} = \frac{1}{1-\frac{i}{1+i}t}$
3. $RIC : r_{RIC}(t) = (1+i)^t$

Per tutte si ha

$r(0) = 1$

$r(1) = 1 + i$

$r'(t) > 0$

Per confrontare i tre grafici studiamo le derivate calcolate in $t = 0$ e $t = 1$

1. $r'_{RIS}(t) = i \qquad r'_{RIS}(0) = r'_{RIS}(1) = i$
2. $r'_{RIA}(t) = -\frac{-d}{(1-dt)^2} = \frac{d}{(1-dt)^2}$
   $r'_{RIA}(0) = d = \frac{i}{1+i}$
   $r'_{RIA}(1) = \frac{d}{(1-d)^2} = \frac{d}{(1-d)} \cdot \frac{1}{1-d} = i(1+i)$ dato che $1 - d = v$
3. $r'_{RIC}(t) = (1+i)^t \ln(1+i)$
   $r'_{RIC}(0) = \ln(1+i)$
   $r'_{RIC}(1) = (1+i)\ln(1+i)$

Consideriamo il punto $t = 0$

$r'_{RIS}(0) = i \qquad = f_{RIS}(i)$

$r'_{RIA}(0) = \frac{i}{1+i} \qquad = f_{RIA}(i) \quad$ (a)

$r'_{RIC}(0) = \ln(1+i) \quad = f_{RIC}(i) \quad$ (b)

Per confrontare le "pendenze consideriamo" il polinomio di Taylor nel punto iniziale $i = 0$ per le due funzioni derivate f_{RIA} e f_{RIC}

$$f(i) = f(0) + f'(0) \cdot i + \frac{f''(0)}{2} \cdot i^2 + \underbrace{o(i^2)}_{errore}$$

(a) $f_{RIA}(i) = \frac{i}{1+i}$
$f'_{RIA}(i) = \frac{(1+i)-i}{(1+i)^2} = \frac{1}{(1+i)^2}$
$f''_{RIA}(i) = -\frac{1}{(1+i)^4} 2(1+i) = -\frac{2}{(1+i)^3}$
$f_{RIA}(i) = 0 + i - \frac{1}{2} 2i^2 + o(i^2) = i - i^2 + o(i^2)$

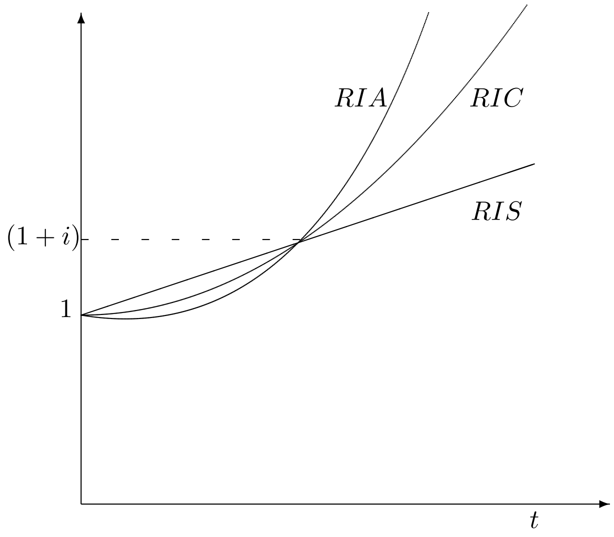
(b) $f_{RIC}(i) = \ln(1+i)$
$f'_{RIC}(i) = \frac{1}{1+i}$
$f''_{RIC}(i) = -\frac{1}{(1+i)^2}$
$f_{RIC}(i) = 0 + i - \frac{1}{2} i^2 + o(i^2)$

$$f_{RIA}(i) < f_{RIC}(i) < f_{RIS}(i)$$
$$r'_{RIA}(0) < r'_{RIC}(0) < r'_{RIS}(0)$$

Consideriamo il punto $t = 1$
$r'_{RIS}(1) = i$
$r'_{RIA}(1) = i(1+i)$
$r'_{RIC}(1) = (1+i)\ln(1+i)$
Abbiamo visto che $\frac{i}{1+i} < \ln(1+i) < i$
Moltiplicando per $(1+i)$

$$i < (1+i)\ln(1+i) < i(1+i)$$

$$\Rightarrow \quad r'_{RIS}(1) < r'_{RIC}(1) < r'_{RIA}(1)$$



FATTORI DI SCONTO:

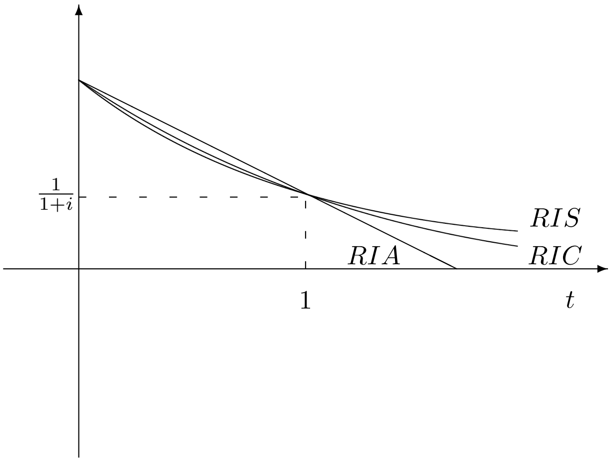
$v_{RIS}(t) = \frac{1}{1+it} = \frac{1}{r_{RIS}(t)}$
$v_{RIC}(t) = \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{1}{r_{RIC}(t)}$
$v_{RIA}(t) = 1 - dt = \frac{1}{r_{RIA}(t)}$

Se $0 < t < 1$

$$\begin{aligned} & r_{RIA}(t) < r_{RIC}(t) < r_{RIS}(t) \\ \Rightarrow & \frac{1}{r_{RIS}(t)} < \frac{1}{r_{RIC}(t)} < \frac{1}{r_{RIA}(t)} \\ & v_{RIS}(t) < v_{RIC}(t) < v_{RIA}(t) \end{aligned}$$

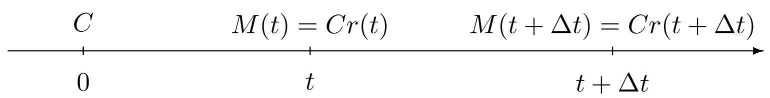
Se $t > 1$

$$\begin{aligned} & r_{RIS}(t) < r_{RIC}(t) < r_{RIA}(t) \\ \Rightarrow & v_{RIA}(t) < v_{RIC}(t) < v_{RIS}(t) \end{aligned}$$


$\frac{1}{1+i}$
RIS
RIC
RIA
1
t

Capitolo 5

INTENSITA' ISTANTANEA DI INTERESSE (NEI TRE REGIMI)



$$\text{INTERESSE} \quad I(t, t+\Delta t) = M(t+\Delta t) - M(t)$$
$$= Cr(t+\Delta t) - Cr(t)$$

$$\text{TASSO DI INTERESSE} \qquad i(t, t\triangle t) = \frac{I(t, \triangle t)}{M(t)} = \frac{Cr(t+\triangle t) - Cr(t)}{Cr(t)}$$

$$\text{INTENSITA' DI INTERESSE} \quad \frac{i(t, t+\triangle t)}{\triangle t} = \frac{r(t+\triangle t) - r(t)}{\triangle t} \cdot \frac{1}{r(t)}$$

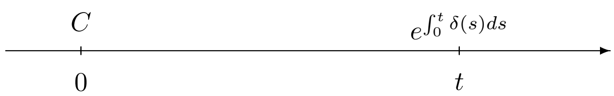
INTENSITA' ISTANTANEA DI INTERESSE $\delta(t)$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{i(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{r(t)} = r'(t) \frac{1}{r(t)} = \frac{d}{dt} \ln r(t)$$

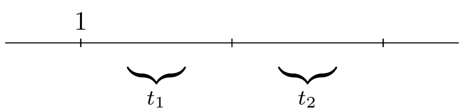
Quindi: data la funzione "legge di capitalizzazione", facendo la derivata logaritmica si ottiene la funzione *intensità istantanea di interesse.* Analogamente l'intensità istantanea di interesse individua completamente la legge di capitalizzazione.
Infatti, nota $\delta(s)$, $\forall s \in (0, t)$, si può ricavare univocamente $r(t)$ tale che $r(0) = 1$:
Dato $\delta(t)$
la relazione che lega $\delta(t)$ e $r(t)$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \ln r(t)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_0^t \delta(s)ds &= \int_0^t \frac{d}{ds} \ln r(s)ds \\
\int_0^t \delta(s)ds &= [\ln r(s)]_0^t \\
\int_0^t \delta(s)ds &= \ln r(t) - \ln r(0) \\
e^{\int_0^t \delta(s)ds} &= r(t)
\end{aligned}$$



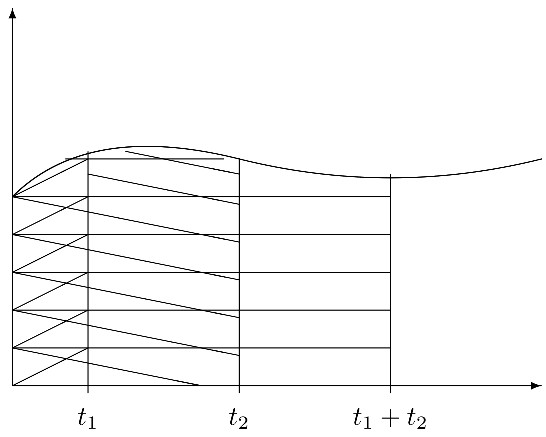
Scindibilità ed Intensità istantanea di interesse



$$e^{\int_0^{t_1+t_2} \delta(s)ds} = e^{\int_0^{t_1} \delta(s)ds} e^{\int_0^{t_2} \delta(s)ds}$$

$$\int_0^{t_1+t_2} \delta(s)ds = \int_0^{t_1} \delta(s)ds + \int_0^{t_2} \delta(s)ds$$

PERCHÈ IL REGIME SIA SCINDIBILE , L'INTENSITÀ ISTANTANEA DI INTERESSE DEVE ESSERE COSTANTE.



Le intensità istantanee di interesse nei tre regimi sono:

$RIS \quad r(t) = 1 + it$

$\delta(t) = \frac{d}{dt} \ln(1 + it) = \frac{1}{1+it} i = \frac{i}{1+it}$

$RIA \quad r(t) = \frac{1}{1-dt}$

$\delta(t) = \frac{d}{dt} \ln \frac{1}{1-dt} = (1 - dt)(-\frac{1}{(1-dt)^2})(-d) = \frac{d}{1-dt}$

$RIC \quad r(t) = (1 + i)^t$

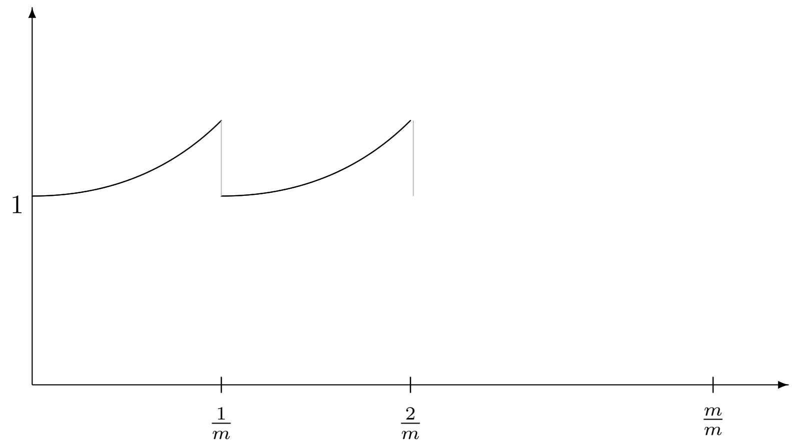
$\delta(t) = \frac{d}{dt} \ln(1 + i)^t = (1 + i)^{-t}(1 + i)^t \ln(1 + i) = \ln(1 + i)$

$\Rightarrow$ COME AVEVAMO GIA' VERIFICATO,
L'UNICO REGIME SCINDIBILE RISULTA ESSERE
IL REGIME DELL'INTERESSE COMPOSTO,
IN QUANTO È L'UNICO REGIME AD AVERE
INTENSITÀ ISTANTANEA DI INTERESSE COSTANTE.

TASSO ANNUO NOMINALE CONVERTIBILE

J_m tasso annuo nominale
convertibile m volte

rappresenta la somma degli interessi che vengono corrisposti durante 1 anno per l'investimento di un capitale unitario quando si conviene che alla fine di ogni $\frac{1}{m}$ di tempo viene pagato $\frac{1}{m}$ del tasso.



si ha $J_m = mi_m \Rightarrow i_m = \frac{J_m}{m}$
dove i_m è il tasso periodale relativo ad $\frac{1}{m}$ di anno. Dalla relazione tra tasso periodale i_m e annuo i si ottiene la relazione di equivalenza tra tasso nominale e tasso i.

$$(1 + i_m)^m = 1 + i \Rightarrow \left(1 + \frac{J_m}{m}\right)^m = 1 + i \Rightarrow J_m = m[(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1]$$

Si ha che: se $J_m \approx i$ allora al crescere di m, J_m decresce
$\Rightarrow f(x)$ decrescente $\frac{df}{dx} < 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x[(1+i)^{\frac{1}{x}} - 1] \\ \frac{df}{dx} &= [(1+i)^{\frac{1}{x}} - 1] + x\left[(1+i)^{\frac{1}{x}} \ln(1+i)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] = \\ &= (1+i)^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}(1+i)^{\frac{1}{x}} \ln(1+i) = \\ &= (1+i)^{\frac{1}{x}}\left[1 - \frac{1}{x}\ln(1+i)\right] - 1 \end{aligned}$$

dobbiamo verificare che $\frac{df}{dx} < 0$

$(1+i)^{\frac{1}{x}}\left[1 - \frac{1}{x}\ln(1+i)\right] - 1 < 0 \qquad /(1+i)^{\frac{1}{x}}$

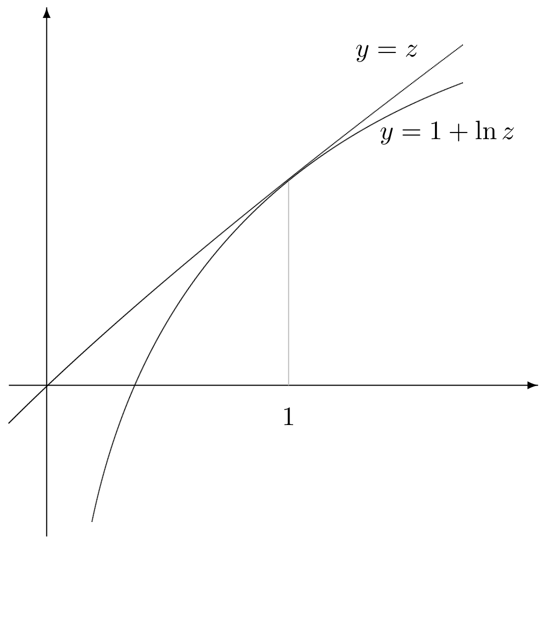
$\left[1 - \frac{1}{x}\ln(1+i)\right] - (1+i)^{-\frac{1}{x}} < 0$

$\left[1 + \ln(1+i)^{-\frac{1}{x}}\right] - (1+i)^{-\frac{1}{x}} < 0$

$1 + \ln(1+i)^{-\frac{1}{x}} < (1+i)^{-\frac{1}{x}}$

pongo $z := (1+i)^{-\frac{1}{x}}$

$1 + lnz < z$



RELAZIONE TRA INTENSITÀ ISTANTANEA DI INTERESSE (RIC) E TASSO NOMINALE

Consideriamo la successione

$$J_1, J_2, ..., J_m$$

È una successione decrescente che ammette limite finito per $m \to +\infty$

$$\lim_{m \to +\infty} J_m = \lim_{m \to +\infty} m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1] =$$

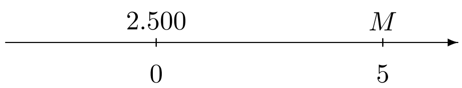
$$= \lim_{\frac{1}{m} \to 0} \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}} = \ln(1+i) = \delta$$

LEGGE DI CAPITALIZZAZIONE NEL RIC (IN FUNZIONE DELL' INTENSITÀ ISTANTANEA DI INTERESSE)

$\delta = \ln(1+i)$
$r(t) = (1+i)^t = e^{\ln(1+i)^t} = e^{t \ln(1+i)} = e^{\delta t}$

Esempio: calcolare il montante di 2.500 euro tra 5 anni se l'intensità istantanea di interesse annua è 0,09.

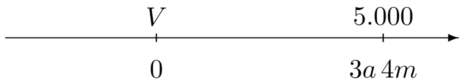
$$M = 2.500 e^{\delta t} = 2.500 e^{0,09 \cdot 5} = 3.920,78$$



la legge di sconto è quindi:

$$(1+i)^{-t} = (r(t))^{-1} = (e^{\delta t})^{-1} = e^{-\delta t}$$

Calcolare il valore oggi di un capitale di 5.000 euro disponibile tra 3 anni e 4 mesi sapendo che l'intensità istantanea annua di interesse è 0,08.



$$V = 5.000e^{-\delta t} = 5.000e^{-0,08(3+\frac{4}{12})} = 3.829,6417$$

ESEMPIO DI CAPITALIZZAZIONE DATA L'INTENSITÀ $\delta(t)$

Determinare il montante di 1.000 euro dopo 6 periodi, sapendo che l'intensità istantanea di interesse è

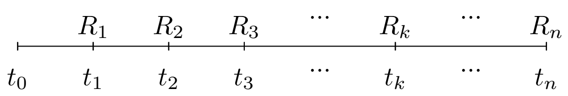
$$\delta(t) = \frac{0,02}{1+0,02t}.$$

$$\begin{aligned} M &= 1.000e^{\int_0^6 \frac{0,02}{1+0,02t}dt} \\ \int_0^6 \frac{0,02}{1+0,02t}dt &= |\ln(1+0,02t)|_0^6 = \ln 1,12 \\ M &= 1.000e^{\ln 1,12} = 1.000 \cdot 1,12 = 1.120 \end{aligned}$$

Capitolo 6

RENDITE

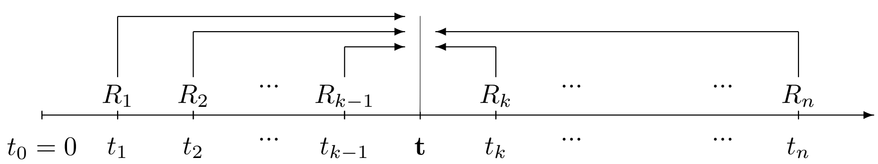
Rendita:= successione di capitali R_k esigibili alle epoche t_k, $k = 1, 2, ..., n$



R_k rata della rendita

t_k scadenza della rata

Valore della rendita al tempo t = somma dei valori in t delle singole rate

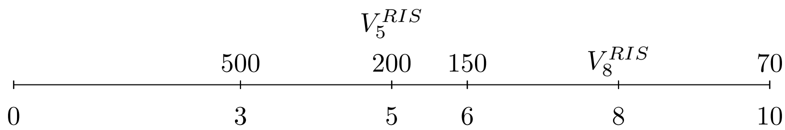


$$V(t) = \sum_{s=1}^{k-1} R_s r(t_s, t) + \sum_{s=k}^{n} R_s v(t, t_s)$$

Le rendite possono essere valutate nei diversi regimi $\begin{cases} RIS \\ RIA \\ RIC \end{cases}$

ESEMPIO

Una rendita è costituita dagli importi [500, 200, 150, 70] disponibili alle scadenze [3, 5, 6, 10] espresse in mesi.
Determinare il valore della rendita al tempo 8 e al tasso annuo di valutazione $i = 0,06$ (RIS).



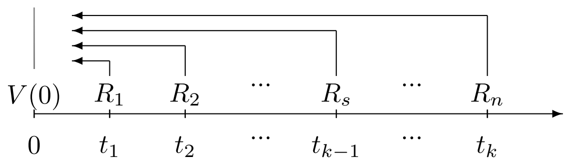
$$V_8^{RIS} = 500(1 + 0,06\frac{5}{12}) + 200(1 + 0,06\frac{3}{12}) + 150(1 + 0,06\frac{2}{12}) + \frac{70}{1 + 0,06\frac{2}{12}}$$

Calcolare il valore della rendita in RIA al tempo 5, $d = 0,05$.

$$V_5^{RIA} = \frac{500}{1 - 0,05\frac{2}{12}} + 200 + 150(1 - 0,05\frac{1}{12}) + 70(1 - 0,05\frac{5}{12})$$

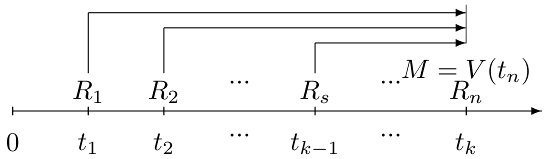
...

Valore attuale di una rendita = somma dei valori in $t = 0$ delle singole rate



$$V = V(0) = \sum_{s=1}^{n} R_s v(0, t_s)$$

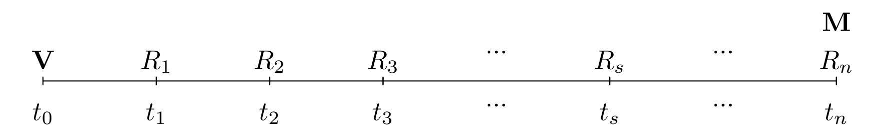
Montante di una rendita = somma dei valori in $t = t_n$ delle singole rate

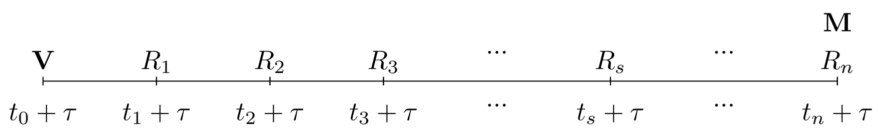


$$M = V(t_n) = \sum_{s=1}^{n} R_s r(t_s, t_n)$$

Se si ha UNIFORMITÀ delle leggi ...

Le leggi di capitalizzazione e sconto nei tre regimi (RIS, RIA, RIC) sono uniformi rispetto al tempo, per cui traslando tutte le scadenze di una rendita di uno stesso tempo τ, il montante ed il valore attuale non cambiano (i momenti di valutazione risultano traslati dello stesso tempo τ).



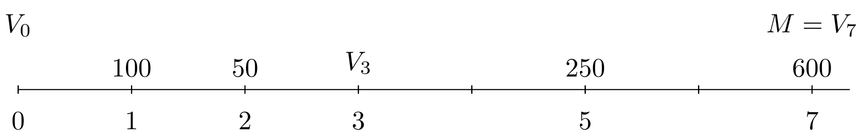


Se si ha SCINDIBILITÀ ...

La valutazione della rendita ad un qualsiasi tempo $\bar{t}$ può essere ottenuta capitalizzando (scontando) la valutazione effettuata ad un tempo precedente $t < \bar{t}$ (successivo $t > \bar{t}$).

ESEMPIO

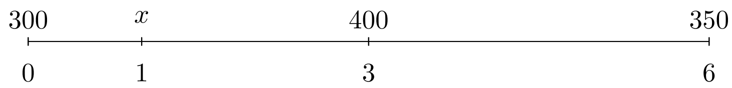
Data la rendita di capitali [100, 50, 250, 600] ai tempi [1, 2, 5, 7] in anni, calcolare il valore della rendita al tempo 3, il montante della rendita in 7, ed il valore attuale al tempo 0. RIC al tasso i annuo.



$$V_3 = 100(1+i)^2 + 50(1+i) + 250(1+i)^{-2} + 600(1+i)^{-4}$$
$$V_0 = V_3(1+i)^{-3}$$
$$V_7 = V_0(1+i)^7 = V_3(1+i)^4.$$

ESEMPIO

Tizio ha i seguenti crediti: 300 euro esigibili immediatamente, 400 euro esigibili tra 3 anni, 350 euro esigibili tra 6 anni. Con il debitore concorda un unico pagamento tra un anno e il regolamento avviene sulla base della legge di interesse composto annuo al tasso $i = 0,06$. Calcolare l'importo del pagamento unico.



$$x = 300(1,06) + 400(1,06)^{-2} + 350(1,06)^{-5} = 935,539$$

...

Quando le rendite hanno caratteristiche di "regolarità" (nelle rate e negli intervalli tra una rata e la successiva) esistono metodi di calcolo "veloci" che consentono di trovare il valore della rendita a un qualunque tempo senza necessariamente fare la valutazione per le singole rate della rendita.

RENDITE A REGIME COMPOSTO

$$\text{Consideriamo una rendita} \begin{cases} \text{rate costanti= 1 (rendita UNITARIA)} \\ \text{scadenze intervallate (rendita PERIODICA)} \\ n \text{ rate} \end{cases}$$

V							M
	1	1	1	...	1		1
0	1	2	3	...	s	...	n

i = tasso di interesse relativo al periodo della rendita

$$V = 1(1+i)^{-1} + 1(1+i)^{-2} + ... + 1(1+i)^{-n} = v + v^2 + v^3 + ... + v^n =$$

si tratta della somma dei primi n termini

in progressione geometrica di 1^o termine v e ragione v

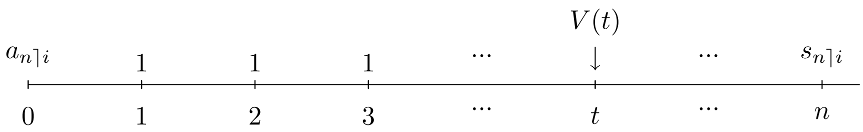
$$= v\frac{1-v^n}{1-v} = v\frac{1-v^n}{1-\frac{1}{1+i}} = v\frac{1-v^n}{\frac{1+i-1}{1+i}} = v\frac{1-v^n}{iv} = \frac{1-v^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} := a_{n\rceil i}$$

si legge: "a figurato n al tasso i"

N.B. Questa espressione fornisce il valore della rendita unitaria periodica di n rate calcolato <u>UN PERIODO PRIMA DELLA SCADENZA DELLA PRIMA RATA</u>.
Per la scindibilità si ha:

$$M = V(1+i)^n = V \cdot r^n = a_{n\rceil i} r^n = \frac{1-v^n}{i} r^n = \frac{r^n - 1}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} =: s_{n\rceil i}$$

N.B. Questa espressione fornisce il valore della rendita unitaria periodica di n rate calcolato <u>ALLA SCADENZA DELL'ULTIMA RATA</u>.
La conoscena del valore attuale $a_{n\rceil i}$ o del montante $s_{n\rceil i}$ consente agevolmente la valutazione della rendita in un qualsiasi altro momento:



$$V(t) = a_{n\rceil i}(1+i)^t$$

oppure

$$V(t) = s_{n\rceil i}(1+i)^{-(n-t)}$$

E se la rendita ha rata costante R?

$$V = Ra_{n\rceil i}$$

$$M = Rs_{n\rceil i}$$

GRAFICO DELLE FUNZIONI (rispetto ad i)

$s_{n\rceil i} = \frac{(1+i)^n-1}{i}$

se $i = 0 \Rightarrow s_{n\rceil i} = n$

se $i \uparrow \Rightarrow s_{n\rceil i} \uparrow$

$s_{n\rceil i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + ... + (1+i) + 1$

$= \sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^k$

$f' = \sum_{k=0}^{n-1} k(1+i)^{k-1} > 0$

$f'' = \sum_{k=0}^{n-1} k(k-1)(1+i)^{k-2} > 0$

$a_{n\rceil i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

se $i = 0 \Rightarrow a_{n\rceil i} = n$

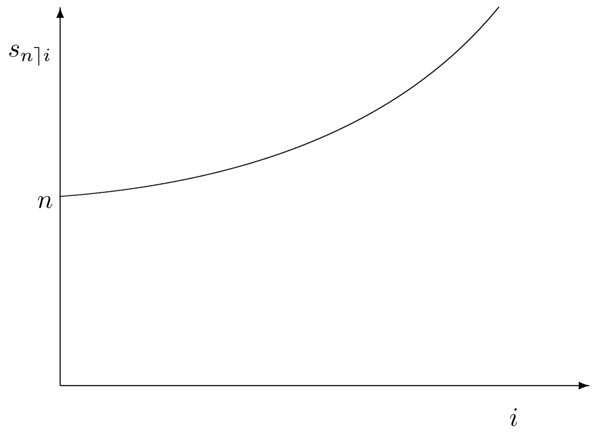
se $i \uparrow \Rightarrow a_{n\rceil i} \downarrow$

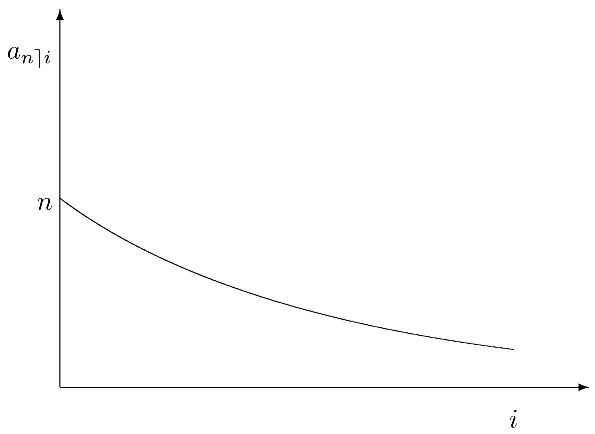
$a_{n\rceil i} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + ... + (1+i)^{-n}$

$= \sum_{k=1}^{n}(1+i)^{-k}$

$f' = \sum_{k=1}^{n}(-k)(1+i)^{-k-1} < 0$

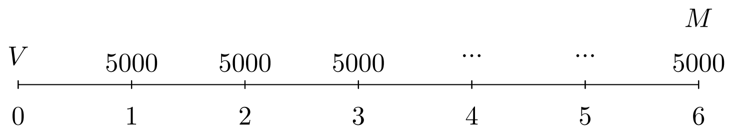
$f'' = \sum_{k=1}^{n}(-k)(-k-1)(1+i)^{-k-2} > 0$





ESEMPIO

Determinare il valore alla scadenza dell'ultima rata ed il valore un periodo prima della scadenza della prima rata di una rendita annua di 6 rate tutte pari a 5.000 euro al tasso 0,135 annuo.



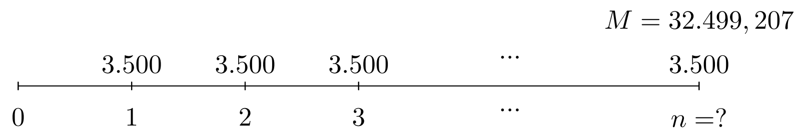
$$V = 5.000 a_{\overline{6}|0,135} = 5.000 \frac{1-(1+0,135)^{-6}}{0,135} = 19.712,523$$
$$M = 5.000 s_{\overline{6}|0,135} = 5.000 \frac{(1+0,135)^{6}-1}{0,135} = 42.142,217$$

E se la rendita fosse stata semestrale?

$$(1+i_2)^2 = 1+i \quad \Rightarrow \quad i_2 = (1+0,135)^{\frac{1}{2}} - 1$$
$$V = 5.000 a_{\overline{6}|i_2}$$
$$V = 5.000 s_{\overline{6}|i_2}$$

ESEMPIO

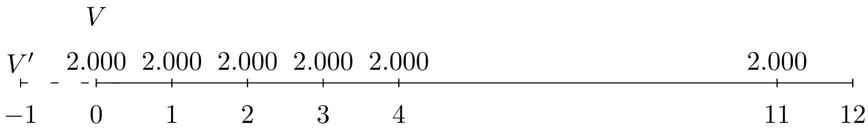
Una rendita annua costante di rata 3.500 euro, valutata alla scadenza dell'ultima rata al tasso annuo 0,093 vale 32.499,207 euro. Determinare il numero di termini della rendita.



$$\begin{aligned}
M &= Rs_{n\rceil i}\\
32.499,207 &= 3.500 s_{n\rceil 0,093}\\
32.499,207 &= 3.500\frac{(1+0,093)^n-1}{0,093}\\
\frac{32.499,207}{3.500}0,093+1 &= 1,093^n\\
1,86355 &= 1,093^n\\
\ln 1,86355 &= n\ \ln 1,093\\
n &= \frac{\ln 1,86355}{\ln 1,093} = 7
\end{aligned}$$

ESEMPIO

A partire da oggi (oggi: primo versamento) depositiamo in banca ad intervalli di un mese 12 capitali di 2.000 euro ciascuno. Sapendo che la banca applica un tasso del 7%, determinare il valore oggi della rendita.



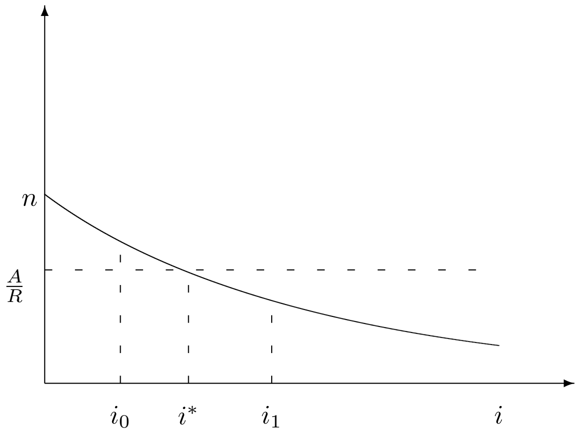
$$(1+i_2)^{12} = 1+i \Rightarrow i_{12} = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,00565$$

$$V = \overbrace{2.000 a_{12\rceil 0,00565}}^{V'}(1+0,00565) =$$

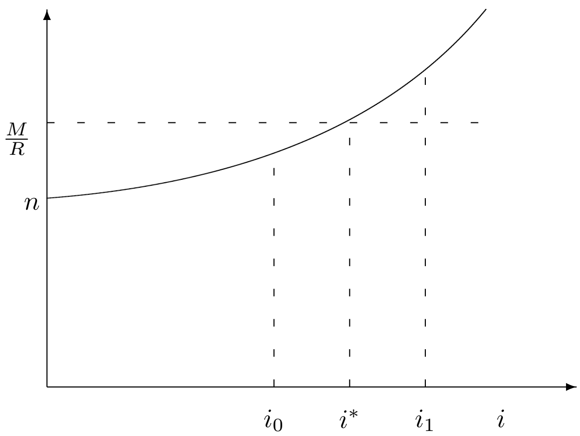
$$= 2.000\frac{1-(1+0,00565)^{-12}}{0,00565}(1,00565) = 23.272$$

Determinazione del tasso i

$$R a_{n\rceil i} = A$$
$$a_{n\rceil i} = \frac{A}{R}$$



$$R s_{n\rceil i} = M$$
$$s_{n\rceil i} = \frac{M}{R}$$



Individuiamo un intervallo (i_0, i_1) tale che :

$$
\begin{array}{ll}
a_{n\rceil i_0} > \dfrac{A}{R} & \qquad s_{n\rceil i_0} < \dfrac{M}{R} \\
a_{n\rceil i_1} < \dfrac{A}{R} & \qquad Rs_{n\rceil i_1} > \dfrac{M}{R} \\
\Downarrow & \qquad \Downarrow
\end{array}
$$

POSSIAMO AFFERMARE CHE LA SOLUZIONE CERCATA SI TROVA NELL'INTERVALLO

$$i^* \in (i_0, i_1)$$

(è chiaro che l'intervallo deve essere non troppo ampio!!!)

ESEMPIO

Una rendita periodica di 15 termini annui di importo 2.000 euro ha valore, alla scadenza dell'investimento, pari a 70.000 euro. Determinare il tasso di interesse applicato.

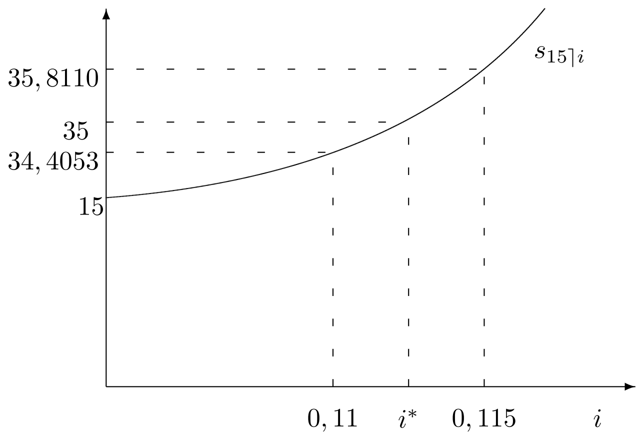
				$M = 70.000$
2.000	2.000	2.000	...	2.000
1	2	3	...	15

$2.000 s_{15\rceil i} = 70.000 \quad \Rightarrow s_{15\rceil i} = 35$

$\frac{(1+i)^{15}-1}{i} = 35$

se $i = 0,11$ $\qquad \frac{(1+0,11)^{15}-1}{0,11} = 34,405358$

se $i = 0,115$ $\qquad \frac{(1+0,115)^{15}-1}{0,115} = 35,81102489$



$0,11 < i^* < 0,115$

ESEMPIO

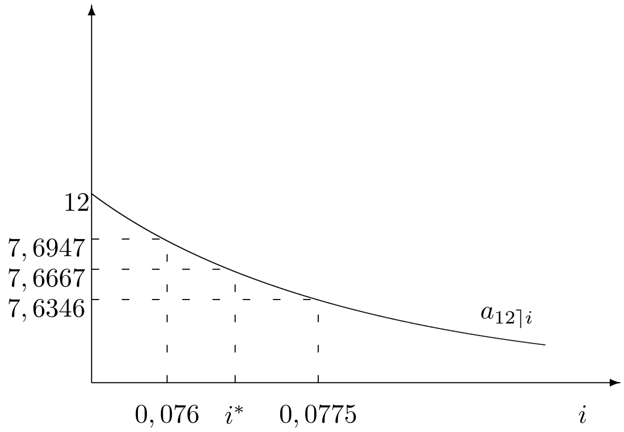
Una rendita costituita da 12 termini annui di importo 3.000 euro vale, un periodo prima del versamento della prima rata, pari a 23.000 euro. Determinare il tasso di interesse annuo applicato.

$23.000 = 3.000\frac{1-(1+i)^{-12}}{i}$

$7,6667 = a_{\overline{12|}i}$

se $i = 0,0775$ $\qquad \frac{1-(1+0{,}0775)^{-12}}{0{,}0775} = 7,6346$

se $i = 0,076$ $\qquad \frac{1-(1+0{,}076)^{-12}}{0{,}076} = 7,6947$



$0,076 < i^* < 0,0775$

ESEMPIO

Una rendita di 10 termini costanti vale:

- al momento dell'ultima rata: 22.465,655 euro
- un periodo prima della scadenza della prima rata: 9.754,918 euro

Determinare rata e tasso.

$$\begin{cases} Rs_{10\rceil i} = 22.465,655 & R = \frac{22.465,655}{s_{10\rceil i}} \\ Ra_{10\rceil i} = 9.754,918 & R = \frac{9.754,918}{a_{10\rceil i}} \end{cases}$$

$$R = \frac{22.465,655}{s_{10\rceil i}} = R = \frac{9.754,918}{a_{10\rceil i}} \quad s_{10\rceil i} = a_{10\rceil i} r^{10}$$

$$R = \frac{22.465,655}{a_{10\rceil i} r^{10}} = R = \frac{9.754,918}{a_{10\rceil i}} \quad \frac{22.465,655}{9.754,918} = r^{10}$$

$$2,303008 = r^{10} \qquad 2,303008^{\frac{1}{10}} - 1 = i \qquad i = 0,087$$

$$R = \frac{22.465,655}{\frac{(1+0,087)^{10}-1}{0,087}} = 1.500$$

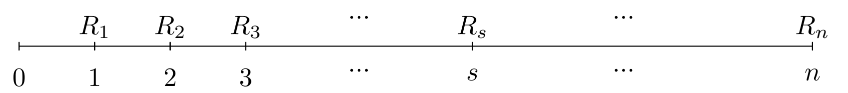
UN PÒ DI TERMINOLOGIA...

Una rendita può avere UNIFORMITÀ:

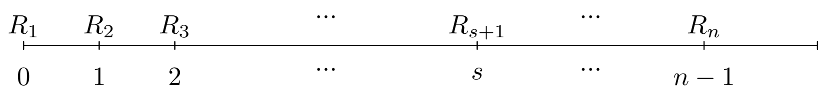
1) DI CAPITALI	$\Rrightarrow$	Rendita <u>costante</u> $R_k = R$, $\forall k$
		Rendita <u>unitaria</u> $R_k = 1$, $\forall k$
2) DI INTERVALLI TRA OGNI SCADENZA E LA SUCCESSIVA	$\Rrightarrow$	Rendita <u>periodica</u>, $t_k - t_{k-1}$ =costante, $\forall k$ $t_k - t_{k-1}$ =periodo della rendita

Le RENDITE PERIODICHE di n rate , a seconda della scadenza della prima rata, sono:

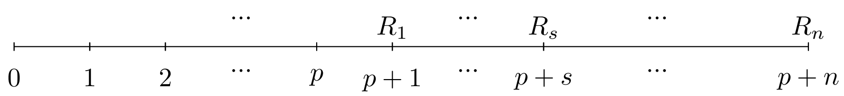
1. IMMEDIATE POSTICIPATE



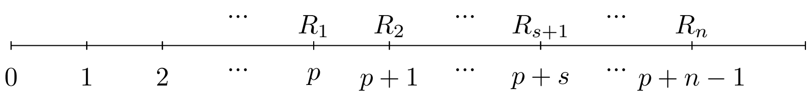
2. IMMEDIATE ANTICIPATE



3. DIFFERITE DI p PERIODI POSTICIPATE



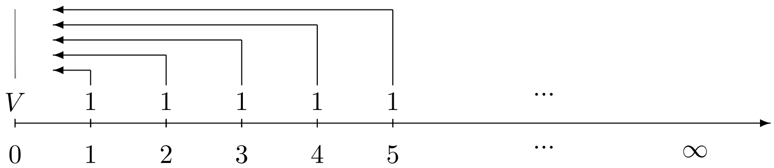
4. DIFFERTITE DI p PERIODI ANTICIPATE



Una rendita si dice:

TEMPORANEA	se ha un numero finito di termini
ILLIMITATA (O PERPETUA)	se ha un numero infinito di termini

⇛VALORE DI UNA RENDITA ILLIMITATA UNITARIA PERIODICA
Consideriamo una rendita immediata posticipata



$$V = v + v^2 + v^3 + v^4 + ... = v\frac{1}{1-v} = v\frac{1}{1-\frac{1}{r}} =$$
$$= v\frac{1}{\frac{r-1}{r}} = v\frac{1}{(1+i-1)v} = \frac{1}{i}$$

E se la rata fosse R?

$$V = R \cdot \frac{1}{i}.$$

ESEMPIO

Data una rendita di rata 1.500 euro, illimitata, semestrale, calcolare il valore 2 anni prima della scadenza della prima rata della rendita, al tasso di valutazione annuo del 6%.

			V'					
V			$\downarrow$	1.500	1.500	1.500	1.500	...
$-\frac{18}{12}$	-1	$-\frac{6}{12}$	0	$\frac{6}{12}$	1	$1+\frac{6}{12}$	2	...

$$(1+i_2)^2 = 1+i \Rightarrow i_2 = (1,06)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,029563$$

$$V = \overbrace{\frac{1.500}{0,029563}}^{V'} 1,06^{-1,5} = 46.492,522.$$

ESEMPIO

Indicare sull'asse temporale la disposizione delle rate delle seguenti rendite:

a. IMMEDIATA ANTICIPATA, RATA 100, 5 TERMINI

b. IMMEDIATA POSTICIPATA, RATA 20, 7 TERMINI

c. DIFFERITA DI 3, POSTICIPATA, RATA 50, 4 TERMINI

d. DIFFERITA DI 4, ANTICIPATA, RATA 10, 6 TERMINI

e. PERPETUA COSTANTE, RATA 25, DIFFERITA 3, POSTICIPATA

f. PERPETUA COSTANTE, RATA 12, IMMEDIATA ANTICIPATA

g. PERPETUA COSTANTE, RATA 15, IMMEDIATA POSTICIPATA

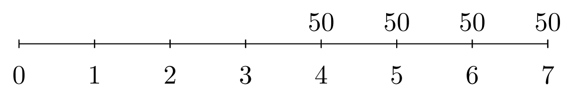
a.

100	100	100	100	100
0	1	2	3	4

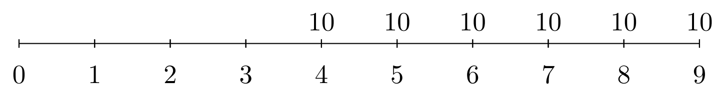
b.

	20	20	20	20	20	20	20
0	1	2	3	4	5	6	7

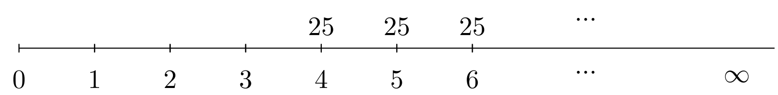
c.


50 50 50 50
0 1 2 3 4 5 6 7

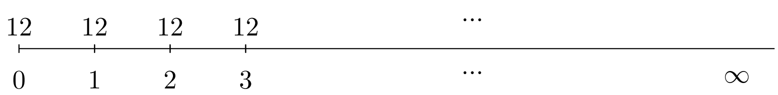
d.


10 10 10 10 10 10
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

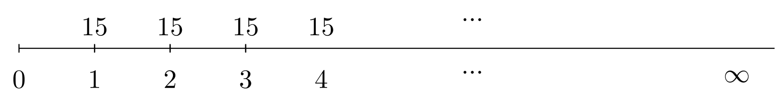
e.


25 25 25 ···
0 1 2 3 4 5 6 ··· ∞

f.

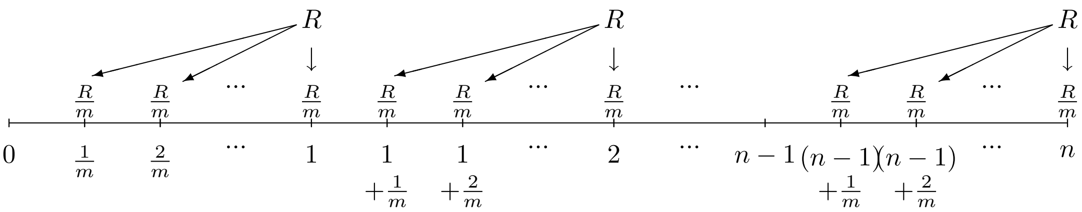

12 12 12 12 ···
0 1 2 3 ··· ∞

g.


15 15 15 15 ···
0 1 2 3 4 ··· ∞

RENDITE FRAZIONATE (costanti)

Una rendita annua di rata R posticipata si dice frazionata m volte in un anno se ad ogni $\frac{1}{m}$ di anno si rende disponibile $\frac{1}{m}$ di rata R.



Come valutare una rendita? — Calcolo tasso $i_m \sim i$
— Calcolo del FATTORE DI FRAZIONAMENTO

Cos'è il fattore di frazionamento e come si calcola?

$$\begin{aligned} i_m \sim i \quad &\Leftrightarrow \quad (1+i_m)^m = 1+i \\ &\Rightarrow \quad (1+\frac{J_m}{m})^m = 1+i \\ &\Rightarrow \quad J_m = [(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1]m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{R}{m} a_{mn\rceil i_m} = \quad & \frac{R}{m}\frac{1-(1+i_m)^{-mn}}{i_m} = \frac{R}{m}\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1} = \\ & = \frac{R}{m}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\frac{i}{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1} = Ra_{n\rceil i}\frac{i}{m[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1]} = \\ & = Ra_{n\rceil i} \cdot \underbrace{\frac{i}{J_m}}_{\text{FATTORE DI FRAZIONAMENTO}} \end{aligned}$$

Il fattore di frazionamento viene approssimato con un semplice calcolo:

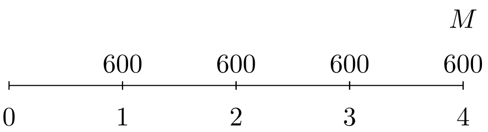
$$\frac{i}{J_m} \simeq 1 + \frac{m-1}{2m} \cdot i$$

Analogamente si ottiene il montante di una rendita frazionata

$$\frac{R}{m} s_{mn\rceil i_m} = Rs_{n\rceil i}\frac{i}{J_m}$$

ESEMPIO

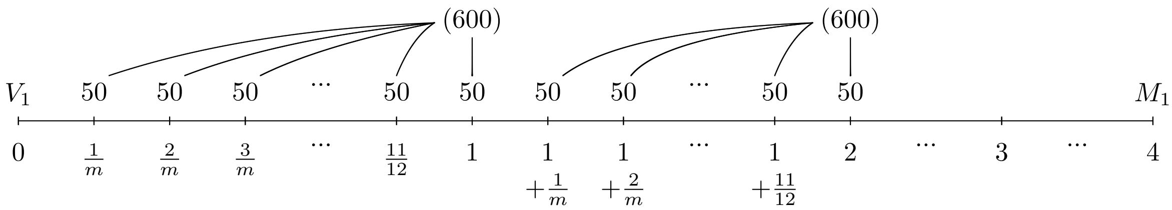
Calcolare il montante di una rendita annua costante di rata 600 euro, immediata, posticipata, costituita da 4 rate, al tasso annuo del 4,5%. Calcolare inoltre il montante e il valore attuale nel caso la rendita venga frazionata mensilmente.



$$M = 600 s_{4\rceil 0,045} = 600\frac{(1,045)^4 - 1}{0,045} = 2.567$$

Se la rendita viene frazionata risulta

$$\frac{R}{m} = \frac{600}{12} = 50$$

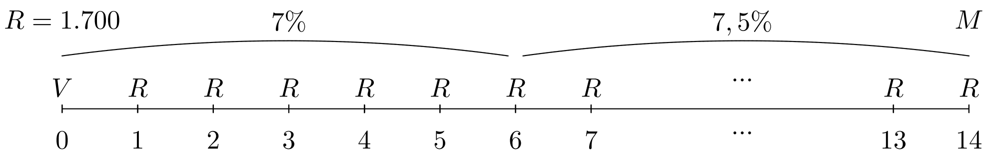


$$M_1 = 600 s_{4\rceil 0,045} \frac{0,045}{J_{12}} = 2.567\left[1 + \frac{12-1}{2\cdot 12} 0,045\right] = 2.619,94$$

$$V_1 = 600 a_{4\rceil 0,045} \frac{0,045}{J_{12}} = 600 \frac{1-(1,045)^{-4}}{0,045} 1,020625 = 2.196,911 (= 2.619,94 \cdot 1,045^{-4})$$

ESEMPIO (con variazione di tasso)

Una rendita annua è costituita da 14 rate, ciascuna di 1.700 euro. Si vuole calcolare il montante, all'atto in cui scade l'ultima rata, sapendo che fino alla scadenza della sesta rata viene applicato il tasso annuo del 7% e successivamente quello del 7,5%.



$$
\begin{aligned}
M &= 1.700 s_{6\rceil 0,07}(1+0,075)^8 + 1.700 s_{8\rceil 0,075} = \\
&= 1.700\tfrac{(1+0,07)^6-1}{0,07}(1,075)^8 + 1.700\tfrac{(1+0,07)^8-1}{0,07} = \\
&= 39.447,003
\end{aligned}
$$

E il valore attuale?

$$
\begin{aligned}
M &= 1.700 a_{6\rceil 0,07} + 1.700 a_{8\rceil 0,075}(1+0,07)^{-6} = \\
&= 1.700\tfrac{1-(1+0,07)^{-6}}{0,07} + 1.700\tfrac{1-(1+0,075)^{-8}}{0,075}(1,07)^{-6} = \\
&= 14.738,2
\end{aligned}
$$

Nota bene: $\underbrace{39.447,003}_{M}(1,075)^{-8}(1,07)^{-6} = \underbrace{14.738,2}_{V}$.

Capitolo 7

COSTITUZIONE DI UN CAPITALE

Un soggetto vuole disporre ad una determinata data futura di un capitale C. A tale scopo programma un piano di risparmio che prevede l'accantonamento periodico di somme costanti R, dette *rate di costituzione*. In particolare, il soggetto potrà decidere se effettuare i versamenti in modo che il capitale C si ottenga allo scadere dell'ultimo versamento (*costituzione di capitale con versamenti posticipati*), oppure un periodo dopo la scadenza dell'ultimo versamento (*costituzione di capitale con versamenti anticipati*).
Dati: C, n, i
Determinare: R
1) COSTITUZIONE CON VERSAMENTI POSTICIPATI

							C
	R	R	R	$\cdots$	R	$\cdots$	R
0	1	2	3	$\cdots$	s	$\cdots$	n

$$Rs_{n\rceil i} = C \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{C}{s_{n\rceil i}}$$

2)COSTITUZIONE CON VERSAMENTI ANTICIPATI

								C
R	R	R	R	$\cdots$	R	$\cdots$	R	
0	1	2	3	$\cdots$	s	$\cdots$	$n-1$	n

$$Rs_{n\rceil i}(1+i) = C \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{C}{s_{n\rceil i}(1+i)}$$

ESEMPIO

Tizio vuole disporre tra cinque anni della somma di 3000 euro. A tale scopo decide di effettuare 5 versamenti annui posticipati, tutti di uguale importo; tasso 5,25% annuo. Determinare l'importo dei versamenti.

					3.000
	R	R	R	R	R
0	1	2	3	4	5

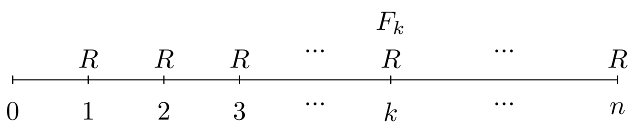
$$Rs_{5\rceil 0,0525} = 3000 \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{3000}{s_{5\rceil 0,0525}} = 540,22$$

E se la costituzione avvenisse con pagamenti anticipati?

					3.000
R	R	R	R	R	
0	1	2	3	4	5

$$Rs_{5\rceil 0,0525}(1+0,0525) = 3000 \qquad \Rightarrow \qquad R = 513,273$$

FONDO DI COSTITUZIONE F_k	$\rightarrow$	Si definisce "fondo di costituzione" ad una data epoca il montante delle rate versate fino a quell'epoca



$$F_k = Rs_{k\rceil i}$$

ESEMPIO

Nell'esempio precedente, calcolare il fondo di costituzione alla fine del terzo anno.
Se i versamenti sono posticipati:

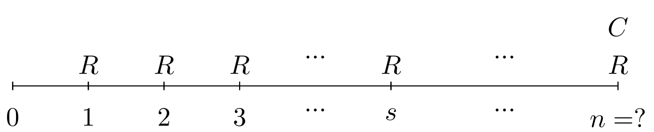
$$F_3 = 540,22 \cdot s_{3\rceil 0,0525} = 1707,234$$

Se i versamenti sono anticipati:

$$F_3 = 513,273 \cdot s_{4\rceil 0,0525} = 2220,506$$

Determinazione del numero di rate necessarie per costituire il capitale C

Il soggetto può decidere a priori, oltre all'importo del capitale da costituire, l'importo della rata R che è disposto a versare. In tal caso l'incognita da determinare (una volta fissato il tasso di valutazione i) sarà il numero di rate n.
Consideriamo il caso di costituzione con versamenti posticipati:



$$R = s_{n\rceil i} = C$$

Dati: C, R, i

Determinare: n

$$
\begin{aligned}
s_{n\rceil i} &= \frac{C}{R} \qquad & \frac{(1+i)^n-1}{i} &= \frac{C}{R} \\
(1+i)^n &= \frac{C}{R}i + 1 \qquad & n &= \frac{\ln\left[\frac{C}{R}i+1\right]}{\ln(1+i)}
\end{aligned}
$$

La soluzione solitamente non è intera

$$
n = n_0 + f \qquad n_0 < n < n_0 + 1
$$
$$
0 < f < 1
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} n_0 \text{ rate non sono sufficienti!} \\ (n_0+1) \text{ rate sono troppe!} \end{cases}
$$

Per costituire il capitale C sarà quindi necessario fare degli adattamenti procedendo in uno dei seguenti modi:

1. Si può aumentare l'importo della rata R in modo da ottenere la costituzione della somma C mediante n_0 versamenti. In tal caso la costituzione del capitale avviene al tempo n_0.

$$
R' s_{n_0\rceil i} = C
$$
$$
\Rightarrow \quad R' = \frac{C}{s_{n_0\rceil i}} \qquad R' > R
$$

2. Si può diminuire l'importo della rata R in modo da ottenere la costituzione del capitale C mediante il versamento di (n_0+1) versamenti. In tal caso la costituzione del capitale avviene al tempo n_0+1.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & & C \\
 & R'' & R'' & R'' & \cdots & R'' & \cdots & & R'' & R'' \\
\hline
0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & s & \cdots & & n_0 & n_0+1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
& R'' s_{n_0+1\rceil i} = C \\
\Rightarrow \quad & R'' = \frac{C}{s_{n_0+1\rceil i}} \qquad\qquad R'' < R
\end{aligned}
$$

3. Si possono effettuare n_0 versamenti di importo R prestabilito ed inoltre un versamento supplementare in modo tale che il montante complessivo dia esattamente la cifra stabilita C. In particolare il versamento supplementare può essere fatto:

   a. Al momento in cui versiamo l'ultima rata R (chiamiamo il versamento supplementare K_1). In tal caso la costituzione del capitale avviene al tempo n_0.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & & C \\
 & R & R & R & \cdots & R & \cdots & & R+K_1 \\
\hline
0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & s & \cdots & & n_0
\end{array}
$$

$$
R s_{n_0\rceil i} + K_1 = C
$$

   b. Un periodo dopo il versamento dell'ultima rata R (chiamiamo il versamento supplementare K_2). In tal caso la costituzione del capitale avviene al tempo $n_0 + 1$.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & & C \\
 & R & R & R & \cdots & R & \cdots & & R & K_2 \\
\hline
0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & s & \cdots & & n_0 & n_0+1
\end{array}
$$

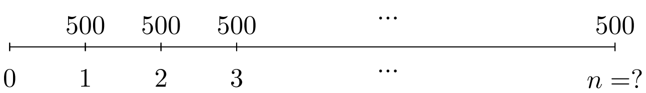
$$Rs_{n_0\rceil i}(1+i)+K_2=C$$

c. A un'epoca intermedia tra le scadenze indicate nei punti **a.** e **b.** che corrisponde, di solito, alla frazione di anno corrispondente alla durata frazionaria trovata f (chiamiamo il versamento supplementare K_3). In tal caso la costituzione del capitale avviene al tempo n_0+f.

$$Rs_{n_0\rceil i}(1+i)^f+K_3=C$$

ESEMPIO

Versando presso una banca, al tasso annuo del 4%, rate di 500 euro ciascuna si vuole costituire, all'atto dell'ultimo versamento, la somma di 10.000 euro. Quanti versamenti occorrono?



$$500s_{n\rceil 0,04}=10.000 \quad \Rightarrow \quad s_{n\rceil 0,04}=20$$

$$\frac{1,04^n-1}{0,04}=20 \qquad 1,04^n-1=20\cdot 0,04$$

$$1,04^n=20\cdot 0,04+1$$

$$n=\frac{\ln 1,8}{\ln 1,04}=14,98$$

Adattamenti:

1) 

$$R' s_{14\rceil 0,04} = 10.000$$
$$\Rightarrow R' = 546,69$$

2) 

$$R'' s_{15\rceil 0,04} = 10.000$$
$$\Rightarrow R'' = 499,411$$

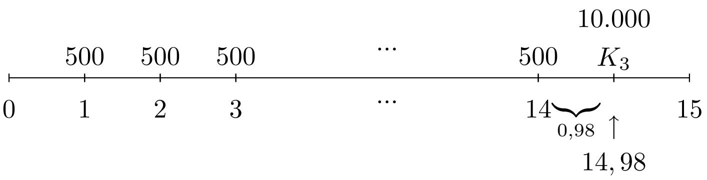
3) *a.* 

$$500 s_{14\rceil 0,04} + K_1 = 10.000$$
$$\Rightarrow K_1 = 854,045$$

3) *b.* 

$$500 s_{\overline{14}|0,04}(1+0,04) + K_2 = 10.000$$
$$\Rightarrow K_2 = 488,207$$

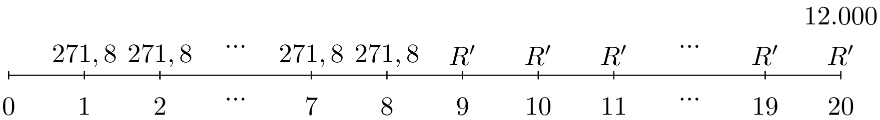
3) *c.*



$$500 s_{\overline{14}|0,04}(1+0,04)^{0,98} + K_3 = 10.000$$
$$\Rightarrow K_3 = 495,664$$

ESEMPIO (modifica della somma da costituire)
Si vuole costituire la somma di 10.000 euro mediante 20 versamenti annui posticipati, al tasso annuo del 6%. Subito dopo il versamento dell'ottava rata si decide di aumentare la somma da costituire a 12.000 euro. Determinare l'importo delle rate.

$$R s_{\overline{20}|0,06} = 10.000 \quad \Rightarrow R = 271,8$$

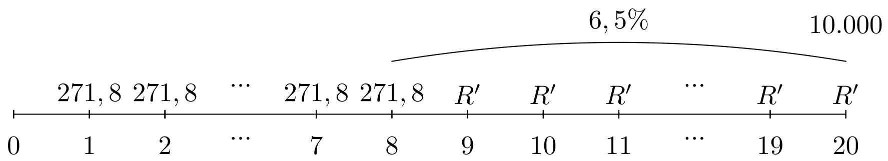


$$271,8 s_{8\rceil 0,06}(1+0,06)^{12} + R' s_{12\rceil 0,06} = 12.000$$
$$\Rightarrow R' = 390,453$$

ESEMPIO (modifica del tasso)

Si vuole costituire la somma di 10.000 euro effettuando 20 versamenti annui posticipati, al tasso annuo del 6%. Subito dopo il versamento dell'ottava rata il tasso viene aumentato dal 6% al 6,5%. Determinare come viene modificata la rata dopo l'ottavo versamento.
(Vedi svolgimento e assi temporali esercizio precedente).

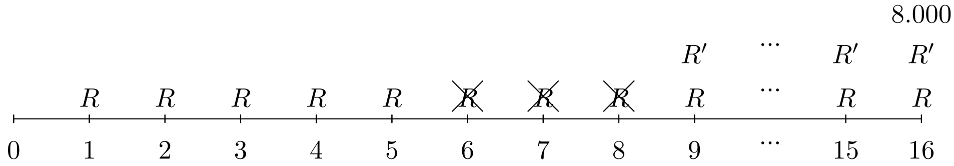
$R = 271,8$



$$271,8 s_{8\rceil 0,06}(1+0,065)^{12} + R' s_{12\rceil 0,065} = 10.000$$
$$\Rightarrow R' = 245,958$$

ESEMPIO (Sospensione dei versamenti)

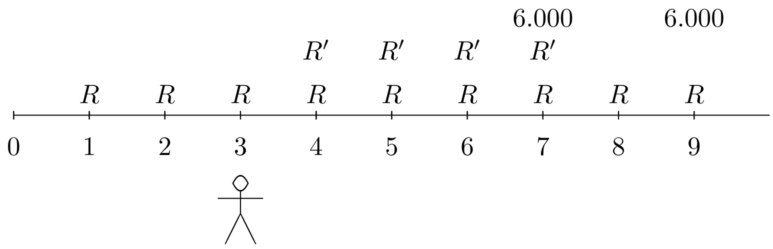
Una persona decide di costituire la somma di 8.000 euro mediante 16 versamenti trimestrali posticipati; tasso trimestrale del 2,75%. Subito dopo avere versato la quinta rata è costretta, in seguito a sopravvenute esigenze, a sospendere i versamenti che vengono successivamente ripresi a partire dal nono incluso. Si determini la nuova rata, fermo restando il fatto che si vuole completare la costituzione della somma prevista alla fine del sedicesimo trimestre.



$$R s_{16\rceil 0,0275} = 8.000 \quad \Rightarrow R = 404,776$$
$$R s_{5\rceil 0,0275}(1 + 0,0275)^{11} + R' s_{8\rceil 0,0275} = 8.000$$
$$\Rightarrow R' = 580,697$$

ESEMPIO (modifica della durata)

Tre anni or sono Tizio ha intrapreso la costituzione della somma di 6.000 euro mediante versamento di 9 rate annue posticipate; tasso annuo 7%. Subito dopo il versamento della terza rata Tizio decide di portare a termine la costituzione mediante successivi 4 versamenti in sostituzione dei 6 inizialmente previsti. Determinare le rate di costituzione.



$$R s_{9\rceil 0,07} = 6.000 \quad \Rightarrow R = 500,916$$
$$500,916 s_{3\rceil 0,07}(1,07)^4 + R' s_{4\rceil 0,07} = 6.000$$
$$\Rightarrow R' = 878,187$$

Capitolo 8

AMMORTAMENTO DEI PRESTITI

PIANO DI RIMBORSO

"a" presta a "b" una somma A.

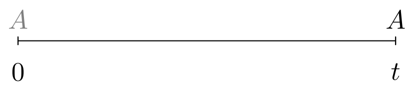
"b" si impegna secondo un PIANO DI RIMBORSO a

$\nearrow$ **1.** restituire entro un certo tempo t la cifra A

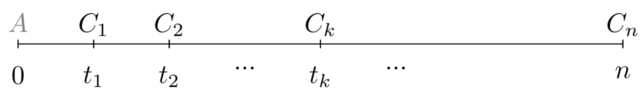
$\searrow$ **2.** pagare per tutta la durata del prestito l'interesse sulla somma ancora dovuta calcolato in base al tasso i

1. La restituzione può avvenire con uno o più pagamenti:

   a) Il rimborso di A in una unica soluzione al tempo n (N.B. Qui parliamo solo di restituzione di capitale puro. Gli interessi vengono considerati al punto 2.!!)



b) Rimborso di n "rate" (QUOTE CAPITALE) C_k, $k = 1, 2, ...n$.
Si ha naturalmente $\sum_{k=1}^{n} C_k = A$.



DEBITO RESIDUO D_k	Con i pagamenti successivi $C_1, C_2, ..., C_n$ l'ammontare del debito A si riduce progressivamente. L'ammontare del debito al tempo t_k si chiama DEBITO RESIDUO al tempo t_k e si indica con D_k.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Debito residuo in } 0 & : & A = D_0 \\
\text{Debito residuo in } t_1 & : & A - C_1 = D_1 \\
\text{Debito residuo in } t_2 & : & D_1 - C_2 = D_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{Debito residuo in } t_k & : & D_{k-1} - C_k = D_k \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{Debito residuo in } t_n = t & : & D_{n-1} - C_n = D_n = 0 \\
 & & \text{(L'ultimo versamento} \\
 & & \text{deve concludere il rimborso!)}
\end{array}$$

Si ha chiaramente che il debito residuo a qualsiasi scadenza è dato dalla somma delle quote capitale ancora da pagare

$$D_k = \sum_{s=k+1}^{n} C_s$$

DEBITO	La parte di debito che al tempo t_k risulta
ESTINTO	già essere rimborsata si chiama DEBITO ESTINTO
E_k	al tempo t_k e si indica con E_k

$$\begin{array}{ccc}
\text{Debito estinto in } 0 & : & 0 = E_0 \\
\text{Debito estinto in } t_1 & : & C_1 = E_1 \\
\text{Debito estinto in } t_2 & : & E_1 + C_2 = E_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{Debito estinto in } t_k & : & E_{k-1} + C_k = E_k \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{Debito estinto in } t_n = t & : & E_{n-1} - C_n = E_n = A
\end{array}$$

Si ha chiaramente che il debito estinto a qualsiasi scadenza è pari alla somma delle quote capitale già pagate

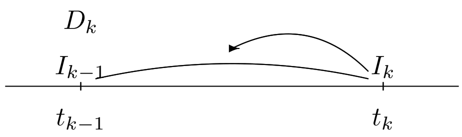
$$E_k = \sum_{s=1}^{k} C_s$$

2. (Escludiamo il caso già visto in cui si ha pagamento al termine di capitale + interessi). L'interesse è corrisposto mediante pagamenti intermedi.

I_k quota interesse pagata al tempo t_k

$\nearrow$ È sempre <u>riferita</u> all'intervallo di tempo intercorrente tra la scadenza t_k e la scadenza in cui si è avuto il precedente pagamento di interessi

$\searrow$ È sempre <u>calcolata</u> sul debito residuo risultante su tale intervallo di tempo



$1+2 \quad \Rightarrow \quad$ RATA $\quad R_k = C_k + I_k$ Rappresenta la somma che ad ogni scadenza paga il debitore.

Gli ammortamenti possono effettuarsi in qualsiasi regime, almeno teoricamente. Dato che una operazione di prestito che implica una restituzione graduale con rate ha naturalmente una durata piuttosto lunga, il regime che consideriamo è il RIC.

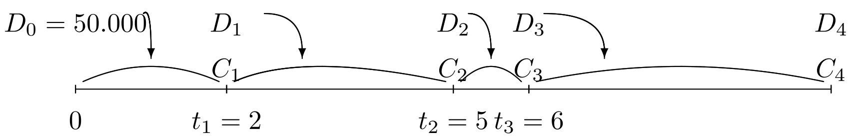
D'ora in poi quindi riteniamo sottinteso l'operare in RIC.

ESEMPIO

Un debito di 50.000 euro viene ammortizzato in 10 anni al tasso $i = 0,08$ mediante il pagamento di 4 quote capitale:

$C_1 = 10.000$ dopo 2 anni
$C_2 = 5.000$ dopo 5 anni
$C_3 = 13.000$ dopo 6 anni
$C_4 = 22.000$ dopo 10 anni

e di altre tante quote interesse alle stesse scadenze. Calcolare le rate di ammortamento.



I debiti residui sono: $D_0 = A = 50.000$

$D_1 = D_0 - C_1 = 50.000 - 10.000 = 40.000$

$D_2 = D_1 - C_2 = 40.000 - 5.000 = 35.000$

$D_3 = D_2 - C_3 = 35.000 - 13.000 = 22.000$

$D_4 = D_3 - C_4 = 22.000 - 22.000 = 0$

Le quote interesse sono:

$I_1 =$ interesse su D_0 calcolato per il periodo $(0, t_1 = 2) = 50.000[(1+0,08)^2 - 1] = 8.320$

$I_2 =$ interesse su D_1 calcolato per il periodo $(t_1, t_2) = (2, 5) = 40.000[(1+0,08)^3 - 1] = 10.388,48$

$I_3 =$ interesse su D_2 calcolato per il periodo $(t_2, t_3) = (5, 6) = 35.000 \cdot 0,08 =$

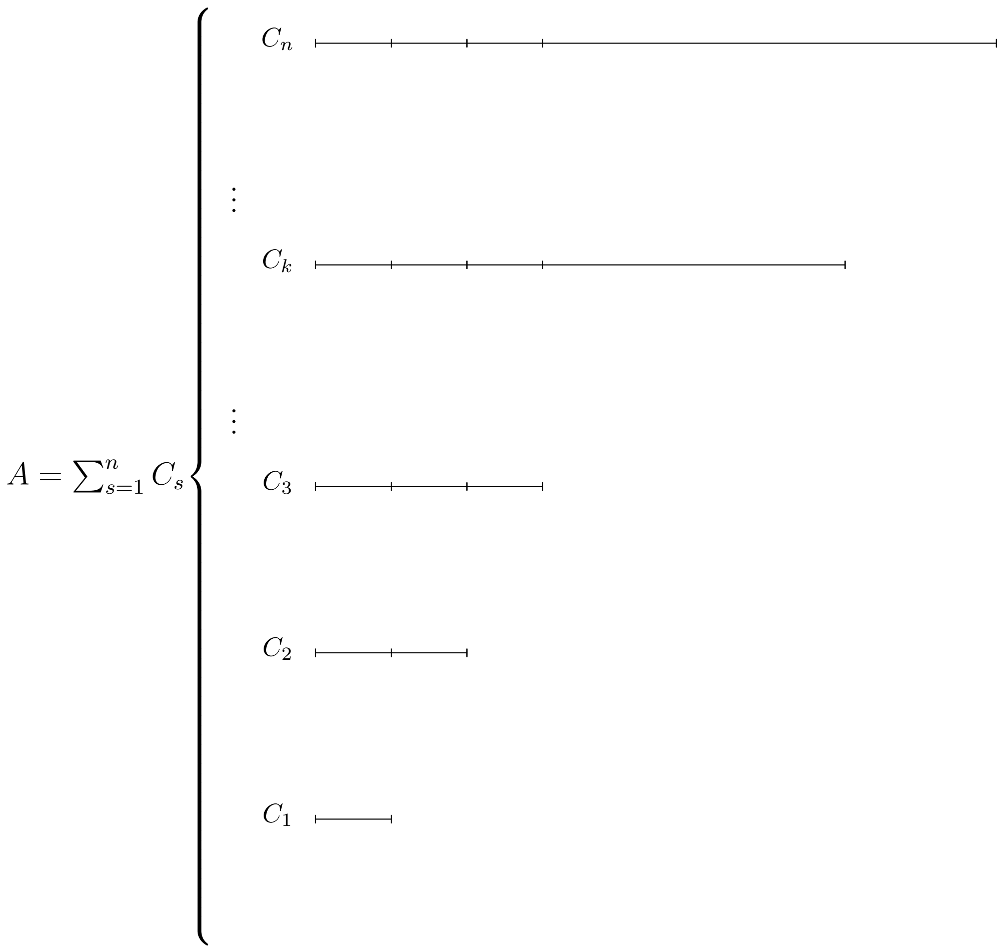
2.800
I_4 = interesse su D_1 calcolato per il periodo $(t_3, t_4) = (6, 10) = 22.000[(1 + 0,08)^4 - 1] = 7.930,758$
Le rate sono:
$R_1 = C_1 + I_1 = 10.000 + 8.320 = 18.320$
$R_2 = C_2 + I_2 = 5.000 + 10.388,48 = 15.388,48$
$R_3 = C_3 + I_3 = 13.000 + 2.800 = 15.800$
$R_4 = C_4 + I_4 = 22.000 + 7.930,758 = 29.930,758$

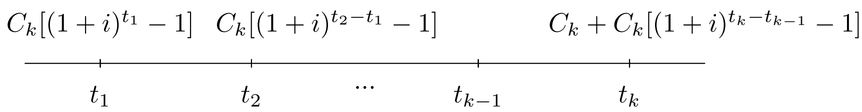
...

Un rimborso del prestito così descritto RISPETTA IL PRINCIPIO DI EQUIVALENZA FINANZIARIA

$$A = \sum_{i=1}^{n} R_i(1+i)^{-t_i}$$

Per verificarlo, consideriamo il capitale A suddiviso nelle varie quote capitale. Si ha che ciascuna di esse risulta essere uguale al valore attuale delle quote interesse che vengono pagate sulla stessa ad ogni scadenza (fino al suo rimborso naturalmente) + il valore di rimborso scontato:





Il valore attuale di questi importi dà esattamente C_k

$$
\begin{gathered}
C_k[(1+i)^{t_1} - 1](1+i)^{-t_1} + C_k[(1+i)^{t_2 - t_1} - 1](1+i)^{-t_2} + C_k[(1+i)^{t_3 - t_2} - 1](1+i)^{-t_3} \\
+ \ldots + \{C_k + C_k[(1+i)^{t_k - t_{k-1}} - 1]\}\,(1+i)^{-t_k} = \\
= C_k[1 - (1+i)^{-t_1}] + C_k[(1+i)^{-t_1} - (1+i)^{-t_2}] + C_k[(1+i)^{-t_2} - (1+i)^{-t_3}] \\
+ \ldots + C_k(1+i)^{-t_k} + C_k[(1+i)^{-t_{k-1}} - (1+i)^{-t_k}] = C_k
\end{gathered}
$$

RELAZIONE TRA DEBITO RESIDUO E RATE

Così come il debito $A(= D_0)$ è pari al valore attuale delle rate del prestito,

$$A = \sum_{s=1}^{n} R_s (1+i)^{-t_s} \tag{8.1}$$

il debito residuo D_k alla scadenza t_k è pari al valore in t_k delle rate che scadono dopo t_k

$$D_k = \sum_{s=k+1}^{n} R_s (1+i)^{-(t_s - t_k)} \tag{8.2}$$

Riprendendo l'esempio precedente si ha :

(8.1) $$18.320(1+0,08)^2 + 15.388,48(1+0,08)^{-5} + 15.800(1+0,08)^{-6} + 29.930,758(1+0,08)^{-10} = 50.000$$

(8.2) $$D_k = 35.000$$

Calcoliamo il valore in $t_2 = 5$ delle rate successive

$$15.800(1+0,08)^{-1} + 29.930,758(1+0,08)^{-5} = 35.000$$

Il PIANO DI RIMBORSO viene schematizzato in una tabella che ad ogni scadenza t_k indica la rata R_k, la sua suddivisione in quota interessi I_k e quota capitale C_k, il debito estinto E_k e il debito residuo D_k.

Dall'esempio precedente si ottiene:

t_k	R_k	I_k	C_k	D_k	E_k
t_0	–	–	–	50.000	–
$t_1 = 2$	18.320	8.320	10.000	40.000	10.000
$t_2 = 5$	15.388, 48	10.388, 48	5.000	35.000	15.000
$t_3 = 6$	15.800	2.800	13.000	22.000	28.000
$t_4 = 10$	29, 930, 758	7.930, 758	22.000	0	50.000

Schema riassuntivo

(a) $A = \sum_{s=1}^{n} c_s$ — IL PRESTITO A E' UGUALE ALLA <u>SOMMA ALGEBRICA</u> DELLE <u>QUOTE CAPITALE</u>

(b) $D_k = \sum_{s=k+1}^{n} c_s$ — IL DEBITO RESIDUO AD OGNI SCADENZA E' UGUALE ALLA <u>SOMMA ALGEBRICA</u> DELLE <u>QUOTE CAPITALE</u> CHE DEVONO ANCORA SCADERE

(c) $A = \sum_{s=1}^{n} R_s(1+i)^{-t_s}$ — IL PRESTITO A E' UGUALE AL <u>VALORE ATTUALE DELLE RATE</u>

(d) $D_k = \sum_{s=k+1}^{n} R_s(1+i)^{-(t_s-t_k)}$ — IL DEBITO RESIDUO A SCADENZA t_k E' PARI AL <u>VALORE IN t_k</u> DELLE <u>RATE CHE SCADONO DOPO t_k</u>

PER FARE UN PIANO DI AMMORTAMENTO POSSONO STABILIRSI:

1) LE RATE R_k oppure **2)** LE QUOTE CAPITALE C_k

1) <u>Si stabiliscono le rate che rendono equa l'operazione (condizione (c))</u>

$\Downarrow$

Di conseguenza si determinano i debiti residui alle varie scadenze (applicando condizione (d))

$\Downarrow$

Di conseguenza si determinano le quote interesse alle varie scadenze

$$I_k = D_{k-1}[(1+i)^{t_k-t_{k-1}} - 1]$$

$\Downarrow$

Le quote capitale C_k vengono determinate per differenza, $C_k = R_k - I_k$

2) Si stabiliscono le quote capitale che verificano la condizione (a)

$\Downarrow$

Di conseguenza si determinano i debiti residui D_k alle varie scadenze applicando la condizione (b)

$\Downarrow$

Di conseguenza si determinano le quote interesse alle varie scadenze

$$I_k = D_{k-1}[(1+i)^{t_k - t_{k-1}} - 1]$$

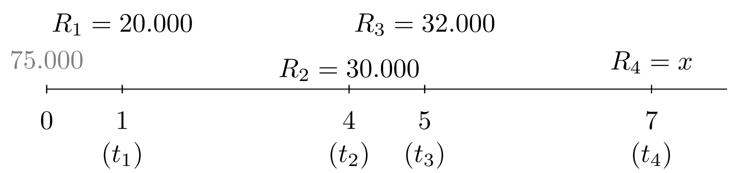
$\Downarrow$

Le rate R_k sono ottenute come somma, $R_k = C_k + I_k$

(Esempio di questa procedura vosto a pag. 3)

ESEMPIO DI AMMORTAMENTO (partendo dalle rate)

Si deve ammortizzare un debito di 75.000 euro al tasso del 7%. Si decide di pagare 4 rate alle scadenze [1, 4, 5, 7] anni. Sapendo che le prime tre rate sono rispettivamente 20.000, 30.000, 32.000, determinare l'importo della rata che verrà pagata fra 7 anni e compilare il piano di ammortamento.



$$75.000 = 20.000(1,07)^{-1} + 30.000(1,07)^{-4} + 32.000(1,07)^{-5} + x(1,07)^{-7}$$

$$\Rightarrow \quad x = 17.031$$

DEBITO RESIDUO:

$0:\quad D_0 = 75.000$

$1 anno:\quad D_1 = 30.000(1,07)^{-3} + 32.000(1,07)^{-4} + 17.031(1,07)^{-6} = 60.250$

$4 anni:\quad D_2 = 32.000(1,07)^{-1} + 17.031(1,07)^{-3} = 43.809$

$5 anni:\quad D_3 = 17.031(1,07)^{-2} = 14.875$

QUOTE INTERESSE:

$$1 anno: \quad I_1 = 75.000 \cdot 0,07 = 5.250$$
$$4 anni: \quad I_2 = 60.250[(1,07)^3 - 1] = 13.559$$
$$5 anni: \quad I_3 = 43.809 \cdot 0,07 = 3.067$$
$$7 anni: \quad I_4 = 14.875[(1,07)^2 - 1] = 2.155$$

QUOTE CAPITALE:

$$1 anno: \quad C_1 = R_1 - I_1 = 20.000 - 5.250 = 14.750$$
$$4 anni: \quad C_2 = R_2 - I_2 = 30.000 - 13.559 = 16.441$$
$$5 anni: \quad C_3 = R_3 - I_3 = 32.000 - 3.067 = 28.933$$
$$7 anni: \quad C_4 = R_4 - I_4 = 17.031 - 2.155 = 14.876$$

t_k	R_k	I_k	C_k	D_k	E_k
t_0	–	–	–	75.000	–
$t_1 = 2$	20.000	5.250	14.750	60.250	14.750
$t_2 = 4$	30.000	13.559	16.411	43.809	31.191
$t_3 = 5$	32.000	3.067	28.933	14.876	60.124
$t_4 = 7$	17.031	2.155	14.876	0	75.000

Finora abbiamo visto l'ammortamento più generale possibile perchè :

- non aveva periodicità nelle scadenze delle quote di ammortamento
- non aveva "regolarità" negli importi delle rate o delle quote capitale

Vediamo ora particolari amortamenti periodici:

AMMORTAMENTO FRANCESE (O PROGRESSIVO)

Le rate vengono versate periodicamente e sono costanti

A	R	R	R	R	$\cdots$	R	R
0	1	2	3	4	$\cdots$	$n-1$	n

$$A = R a_{\overline{n}|i} \Rightarrow R = \frac{A}{a_{\overline{n}|i}}$$

Una volta trovate le rate, determiniamo la loro scomposizione in quota capitale e quota interessi. Possiamo quindi procedere come precedentemente descritto.

Nell'ammortamento francese si possono trovare regole particolari: facendo riferimento al pagamento al tempo n, notiamo che

$$\begin{aligned} R = C_n + iD_{n-1} = C_n + iC_n &= C_n(1+i) \\ &\Rightarrow C_n = Rv \end{aligned}$$

Esiste inoltre una relazione ricorsiva che lega quote capitale e quota interesse di due rate consecutive: da $R = R_{k+1}$ si ha

$$\begin{aligned} C_k + I_k &= C_{k+1} + I_{k+1} \\ C_k + D_{k-1}i &= C_{k+1} + D_k i \\ C_k + (D_k + C_k)i &= C_{k+1} + D_k i \\ C_k(1+i) + D_k i &= C_{k+1} + D_k i \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ogni quota capitale si ottiene moltiplicando la precedente per il fattore $(1+i)$.

Troviamo la prima quota capitale:

$C_n = Rv$

$C_{n-1} = Cv = Rv^2$

$C_{n-2} = C_{n-1}v = Rv^2 v = Rv^3$

$C_{n-3} = C_{n-2}v = Rv^3 v = Rv^4$

$\vdots$

$C_1 = C_{n-(n-1)} = Rv^n$

$\Rightarrow$ LE QUOTE CAPITALE VARIANO IN PROGRESSIONE GEOMETRICA DI PRIMO TERMINE $C_1 = Rv^n$ E RAGIONE $(1+i) = r$.

ESEMPIO

Un prestito di 3.000 euro viene ammortizzato in 5 anni con quote di ammortamento costanti al tasso del 15% annuo. Compilare il piano di ammortamento.

3.000	R	R	R	R	R
0	1	2	3	4	5

$Ra_{5\rceil 0,15} = 3.000$

$R = \frac{3.000}{a_{5\rceil 0,15}} = 894,95$

$C_1 = Rv^5 = 894,95 \cdot 1,15^{-5} = 444,95$

$C_2 = C_1 \cdot 1,15 = 511,69$

$C_3 = C_1 \cdot 1,15^2 = 588,45$

$C_4 = C_1 \cdot 1,15^3 = 676,71$

$C_5 = C_1 \cdot 1,15^4 = 778,21$

Per cui le quote interesse sono:

$I_1 = 894,95 - 444,95 = 450$

$I_2 = 894,95 - 511,69 = 383,26$

$I_3 = 894,95 - 588,45 = 306,50$

$I_4 = 894,95 - 676,71 = 218,24$

$I_5 = 894,95 - 778,21 = 116,74$

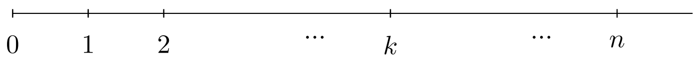
t_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	3.000	–
1	894,95	444,95	450	2.555,05	444,95
2	894,95	511,69	383,26	2.043,36	956,64
3	894,95	588,45	306,50	1.454,92	1.545,09
4	894,95	676,71	218,24	778,21	2.221,8
5	894,95	778,21	116,74	–	3.000

8.1 AMMORTAMENTO ITALIANO (o UNIFORME)

Ammortamento periodico a quote CAPITALE costanti.
[Per il punto (a) dello schema riassuntivo]
Si ha:

$$C_k = C = \frac{A}{n}$$

[Lo schema per la determinazione del piano è il 2]



$$\begin{aligned} D_k &= (n-k)\frac{A}{n} \\ I_k &= iD_{k-1} = i[n-(k-1)]\frac{A}{n} = i(n-k+1)\frac{A}{n} \end{aligned}$$

Ad ogni scadenza il debito residuo diminuisce di $\frac{A}{n}$. Partendo dal primo debito residuo

$$D_0 = A$$

Si possono ottenere tutti i seguenti.
Il debito residuo varia in PROGRESSIONE ARITMETICA di primo termine A e ragione $-\frac{A}{n}$.
Di conseguenza anche le quote interesse decrescono in progressione aritmetica:

1^o *termine* : $I_1 = Ai$
Ragione : $-\frac{A}{n}i$

ESEMPIO

Compilare il piano di ammortamento del prestito di pagina 80 nel caso avvenga con quote capitale costanti.

$$C = \frac{3.000}{5} = 600$$

t_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	3.000	–
1	1.050	600	450	2.400	600
2	960	600	360	1.800	1.200
3	870	600	270	1.200	1.800
4	780	600	180	600	2.400
5	690	600	90	–	3.000

8.2 AMMORTAMENTO AMERICANO

Debitore e creditore convengono il rimborso graduale con pagamento periodico degli interessi; il debitore però provvede, da parte sua, a costituire la somma A mediante versamenti opportunamente programmati. In tal modo:

a. Il debitore riceve in prestito la somma A, paga periodicamente al creditore gli interessi (Ai all'anno) e rimborsa la somma A a scadenza.

A	Ai	Ai	Ai	Ai	$\cdots$	Ai	$\cdots$	$Ai + A$
0	1	2	3	4	$\cdots$	k	$\cdots$	n

$i=$ "tasso di remunerazione"

b. Il debitore provvede, nel corso dell'operazione, alla costituzione della somma A mediante versamenti annuali di importo costante Q.

	Q	Q	Q	Q	$\cdots$	Q	$\cdots$	A Q
0	1	2	3	4	$\cdots$	k	$\cdots$	n

j= "tasso di ricostituzione"

$$Qs_{n\rceil j} = A \Rightarrow Q = \frac{A}{s_{n\rceil j}}$$

c. In definitiva, il debitore paga complessivamente, ogni anno, una somma R così composta:

$$R = Ai + \frac{A}{s_{n\rceil j}} = A\left[i + \frac{1}{s_{n\rceil j}}\right]$$

i TASSO DI REMUNERAZIONE
j TASSO DI RICOSTITUZIONE
SOLITAMENTE $j < i$

L'AMMORTAMENTO AMERICANO è un ammortamento a rate costanti. L'importo della rata risulta uguale a quello della rata dell'ammortamento francese quando $i = j$.

Se $i = j \Rightarrow R_A = R_F$ (rata "americano"= rata "francese)

$$R_A = Ai + \frac{A}{s_{n\rceil i}} = A\left[i + \frac{1}{s_{n\rceil i}}\right] \qquad R_F = \frac{A}{a_{n\rceil i}}$$

basta dimostrare che

$$\begin{aligned} i + \frac{1}{s_{n\rceil i}} &= \frac{1}{a_{n\rceil i}} \\ \frac{is_{n\rceil i} + 1}{a_{n\rceil i}(1+i)^n} &= \frac{1}{a_{n\rceil i}} \\ is_{n\rceil i} + 1 &= (1+i)^n \\ s_{n\rceil i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad \text{vero!} \end{aligned}$$

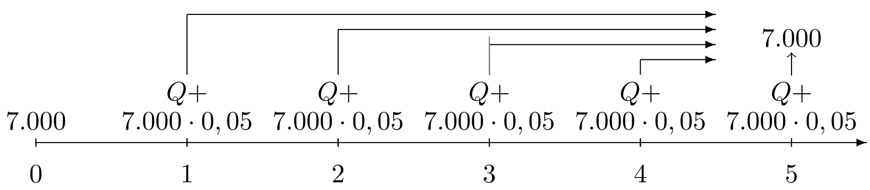
Se $j < i \Rightarrow R_A > R_F$

$$R_A = A\left[i + \frac{1}{s_{n\rceil j}}\right]$$

$$R_F = \frac{A}{a_{n\rceil i}} = A\left[i + \frac{1}{s_{n\rceil i}}\right]$$

$$\begin{aligned} s_{n\rceil j} < s_{n\rceil i} &\Rightarrow \frac{1}{s_{n\rceil j}} > \frac{1}{s_{n\rceil i}} \\ &\Rightarrow R_A > R_F \qquad CVD \end{aligned}$$

ESEMPIO
Tizio ottiene in prestito la somma di 7.000 euro da rimborsare tra 5 anni, con pagamento annuo posticipato degli interessi al tasso annuo del 5 %. Egli provvede, però, alla costituzione della somma mutuata mediante versamenti annui posticipati di importo costante; tasso 4 %. Determinare la rata.

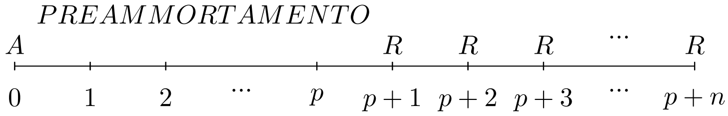


$$Qs_{5\rceil 0{,}04} = 7.000 \quad \Rightarrow \quad Q = 1.292{,}39$$

$$R = Q + 7.000 \cdot 0{,}05 = 1.292{,}39 + 350 = 1.642{,}39$$

8.3 PREAMMORTAMENTO

Consideriamo il capitale A che deve essere rimborsato mediante pagamento di n rate, ciascuna di importo R. Accade spesso che la prima rata sia pagabile dopo p periodi, cioè in $(p+1)$. In questo caso si parla di ammortamento differito e il periodo che va dal momento della stipulazione del contratto di mutuo a p costituisce il PERIODO DI PREAMMORTAMENTO.



Si distinguono due casi:

1. Durante il periodo di differimento viene pagato annualmente l'interesse sull'intero debito Ai. Ne segue che, trascorso il periodo del differimento,

il debito da rimborsare è ancora A per cui la rata d'ammortamento da pagare per n anni è

$$R = \frac{A}{a_{n\rceil i}}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} A & Ai & Ai & \cdots & Ai & R & R & \cdots & R \\ \hline 0 & 1 & 2 & \cdots & p & p+1 & p+2 & \cdots & p+n \end{array}$$

2. Durante il periodo di differimento non viene pagato l'interesse annuo ma viene fatta la capitalizzazione del debito A per p anni. Il debito da ammortizzare, valutato al tempo p, diventa

$$A(1+i)^p \Rightarrow R = \frac{A(1+i)^p}{a_{n\rceil i}}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & & & A(1+i)^p & R & R & \cdots & R \\ \hline 0 & 1 & 2 & \cdots & p & p+1 & p+2 & \cdots & p+n \end{array}$$

ESEMPIO

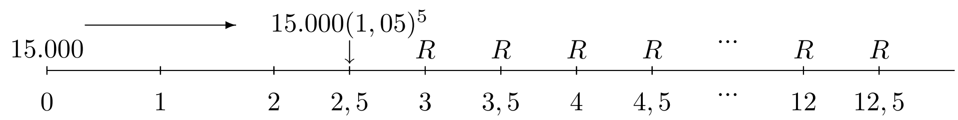
Un prestito di 10.000 euro deve essere ammortizzato mediante pagamento di 10 rate annue al tasso annuo dell'11 %. L'ammortamento è differito di 3 anni, posticipato. Durante il periodo di differimento il debitore paga annualmente l'interesse allo stesso tasso annuo dell'11 %. Determinare i pagamenti effettuati dal debitore.

$$\begin{array}{cccccccc} & 1.100 & 1.100 & 1.100 & & & & & \\ A & \downarrow & \downarrow & \downarrow & R & R & R & \cdots & R \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \cdots & 13 \end{array}$$

$$\begin{aligned} Ai &= 10.000 \cdot 0,11 = 1.100 \\ R &= \frac{10.000}{a_{10\rceil 0,11}} = \frac{10.000}{\frac{1-(1,11)^{-10}}{0,11}} = 1.698 \end{aligned}$$

ESEMPIO

Un prestito di 15.000 euro deve essere ammortizzato mediante pagamento di 20 rate semestrali al tasso del 5 % semestrale. L'ammortamento è differito di 2 anni e mezzo, posticipato. Durante il periodo di differimento è prevista la capitalizzazione del debito residuo in base allo stesso tasso semestrale del 5 %. Determinare i pagamenti effettuati dal debitore.



$$15.000 \cdot 1,05^5 = 19.144,223$$

$$R = \frac{19.144,223}{a_{20\rceil 0,05}} = 1.536,132$$

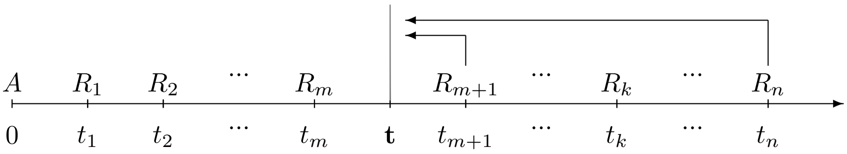
Capitolo 9

VALUTAZIONE DI UN PRESTITO

In qualsiasi momento della vita di un prestito si può presentare la necessità di effettuare:

cessione del prestito	Il creditore decide di cedere il suo credito a una terza persona. Si tratta di determinare la somma che il creditore può ricavare dalla cessione.
anticipata estinzione del prestito	Il debitore decide di estinguere anticipatamente il suo debito. Si tratta di determinare la somma che il debitore deve pagare al creditore per restare anticipatamente libero dall'impegno a suo tempo assunto. Si parla anche di "riscatto del debito" e la somma che il debitore paga prende il nome di "prezzo di riscatto".
esigenze di bilancio	La valutazione viene fatta allo scopo di iscrivere in bilancio il credito che viene valutato.

Quando si procede alla valutazione di un prestito ad un certo tempo t, si considerano solo le somme che dovranno essere pagate dopo t. Dato che in seguito alla cessione o l'anticipata estinzione il pagamento di queste somme viene anticipato, occorre valutare al tempo t tali somme. Consideriamo la legge di sconto COMPOSTO.



VALORE DEL PRESTITO AL TEMPO t (AL TASSO DI VALUTAZIONE i')

$$V_t^{(i')} = \sum_{k=m+1}^{n} R_k(1+i')^{-(t_k-t)}$$

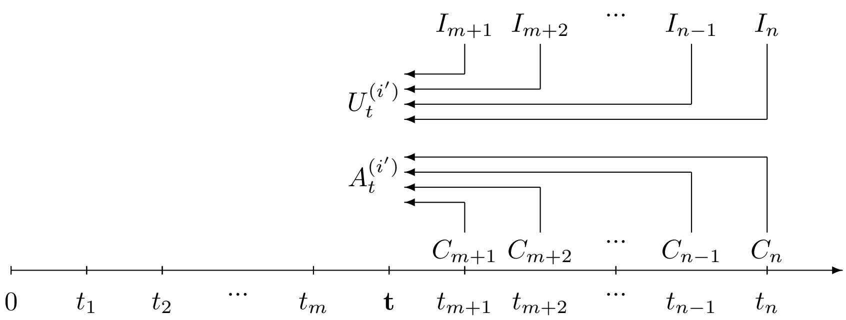
Molto spesso nella valutazione di un prestito è opportuno fare distinzione tra incassi in conto capitale e incassi in conto interesse: i primi danno origine alla NUDA PROPRIETA', i secondi all'USUFRUTTO.

NUDA PROPRIETA' DEL PRESTITO AL TEMPO t (AL TASSO DI VALUTAZIONE i')

$$A_t^{(i')} = \sum_{k=m+1}^{n} C_k(1+i')^{-(t_k-t)}$$

USUFRUTTO DEL PRESTITO AL TEMPO t (AL TASSO DI VALUTAZIONE i')

$$U_t^{(i')} = \sum_{k=m+1}^{n} I_k(1+i')^{-(t_k-t)}$$



Si ha chiaramente:

$$V_t^{(i')} =: A_t^{(i')} + U_t^{(i')}$$

ESEMPIO

Un prestito di 4.500 euro deve essere rimborsato dopo 6 anni. È prevista la capitalizzazione semestrale al tasso del 4 % semestrale. Valutare il prestito alla fine del secondo anno al tasso semestrale del 3,75 %.

4.500	V	M
0	2	6 *anni*

$$M = 4.500(1 + 0,04)^{12} = 7.204,635$$

$$V = 7.204,635(1 + 0,0375)^{-8} = 5.366,697$$

ESEMPIO

Un prestito di 2.000 euro prevede la restituzione del capitale alla scadenza e il pagamento degli interessi, annualmente e posticipatamente, al tasso del 5% annuo. La durata del prestito è 10 anni. Calcolare il valore del prestito dopo 4 anni al tasso del 5, 25 %.

2.000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$$V_4 = \underbrace{2.000 \cdot 1,0525^{-6}}_{A_4} + \underbrace{100a_{\overline{6}|0,0525}}_{U_4} = 1.974,816$$

FORMULA DI MAKEHAM

Nel caso in cui:

1. il piano di rimborso sia PERIODICO
2. la valutazione venga fatta ad una SCADENZA m

si ha una relazione che lega USUFRUTTO (al tasso i'), DEBITO RESIDUO e NUDA PROPRIETÀ (al tasso i').

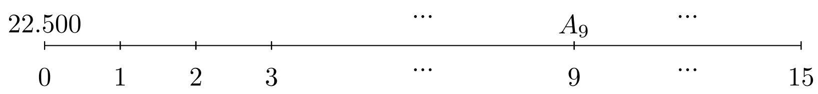
$$U_m^{(i')} = \frac{i}{i'}\left[D_m - A_m^{(i')}\right]$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
D_m - A_m^{(i')} &= \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} C_k - \sum_{k=m+1}^{n} C_k v'^{k-m} = \\
&= \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} C_k (1 - v'^{k-m}) = \\
&= i' \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} C_k \frac{(1-v'^{k-m})}{i'} = \\
&= i' \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} C_k a_{k-m\neg i'} = \\
&= i'[C_{m+1}v' + C_{m+2}(v' + v'^2) + \\
&\quad C_{m+3}(v' + v'^2 + v'^3) + ... + C_n(v' + v'^2 + ... + v'^{n-m})] = \\
&= i'[v'(C_{m+1} + C_{m+2} + C_{m+3} + ... + C_n) + v'^2(C_{m+2} + C_{m+3} + ... + C_n) + \\
&\quad v'^3(C_{m+3} + ... + C_n) + ... + v'^{n-m}C_n] = \\
&= i'[v'D_m + v'^2 D_{m+1} + v'^3 D_{m+2} + ... + v'^{n-m} D_{n-1}] = \\
&= i' \textstyle\sum_{k=1}^{n-m} v'^k D_{m+k-1} = \frac{i'}{i} \sum_{k=1}^{n-m} v'^k i D_{m+k-1} = \\
&= \textstyle\frac{i'}{i} \sum_{k=1}^{n-m} v'^k I_{m+k} = \frac{i'}{i} U_m^{(i')} \\
&\Rrightarrow U_m^{(i')} = \textstyle\frac{i}{i'}[D_m - A_m^{(i')}] \quad CVD
\end{aligned}$$

ESEMPIO

Un prestito di 22.500 euro è rimborsabile con ammortamento uniforme mediante pagamento di 15 rate annue al tasso annuo dell'11 %. Si vuole determinare il valore dell'intero prestito, distinto in valore della nuda proprietà e valore dell'usufrutto, dopo il pagamento della nona rata, al tasso di valutazione dell'11,5 %.



$$C = \frac{22.500}{15} = 1.500 \qquad i = 0,11$$
$$i' = 0,115$$

$$A_9^{(0,115)} = 1.500 a_{6\rceil 0,115} = 6.255,441$$
$$D_9 = 1.500 \cdot 6 = 9.000$$
$$U_9^{(0,115)} = \frac{0,11}{0,115}[9.000 - 6.255,441] = 2.625,230$$
$$V_9^{(0,115)} = A_9^{(0,115)} + U_9^{(0,115)} = 6.255,441 + 2.625,230 = 8.880,671$$

Capitolo 10

PRESTITI DIVISI IN TITOLI

Quando un ente, una società, ha bisogno di ottenere un prestito per una forte somma e per un lungo periodo di tempo, difficilmente trova un unico prestatore in grado di soddisfare la sua richiesta.
Inquesti casi il prestito viene suddiviso in quote, generalmente di piccolo importo, rappresentate da TITOLI DI CREDITO. Vengono offerti alla pubblica sottoscrizione generalmente tramite un Consorzio di Istituti di Credito che si impegna al collocamento. Gli elementi costituitivi del prestito (importo e durata, misura e modalità di pagamento degli interessi, modalità di rimborso dei titoli, premi, ecc.) vengono resi noti preventivamente al pubblico mediante un comunicato chiamato 'programma di emissione'.
Quando i titoli vengono pagati tutti ad un' unica scadenza prendono il nome di buoni.
Quando i titoli vengono rimborsati gradualmente per sorteggio, secondo un piano di ammortamento preventivamente stabilito, prendono il nome di obbligazioni.
Consideriamo il caso in cui l'emittente del prestito (debitore) sia lo Stato Italiano. I più comuni titoli di credito emessi sono:

1. Buoni Ordinari del Tesoro: BOT

    - titoli a capitalizzazione integrale, senza cedole (Zero Coupon Bond)

- a breve scadenza: 3, 6, 12 mesi
- emessi il 15 e 30 di ogni mese con asta competitiva

2. Certificati del Tesoro Zero-coupon: CTZ
    - titoli a capitalizzazione integrale
    - media scadenza, 2 anni
    - emessi con asta pubblica

3. Buoni del Tesoro Poliennali: BTP
    - titoli obbligazionari con cedole fisse (generalmente semestrali o annuali)
    - a medio e lungo termine: 3, 5, 7, 10 e 30 anni
    - emessi con decreto del Ministero del Tesoro col quale si determinano l'importo, la durata, il prezzo base di partecipazione all'asta, il tasso tecnico i, il taglio minimo, ...

4. Certificati di Credito del Tesoro: CCT
    - titoli indicizzati, prevedono la corresponsione periodica degli interessi maturati con cedole indicizzate (le cedole, semestrali o annuali, corrisposte in via posticipata, vengono calcolate ad un tasso adeguabile, ottenuto sulla base di un tasso medio dei BOT a 6 mesi emessi nel bimestre o trimestre precedente il mese antecedente il godimento della cedola)
    - a medio e lungo termine: 3, 4, 5, 6, 7 e 10 anni
    - emessi con cadenza mensile; la gestione del loro collocamento sul mercato è affidata alla Banca d'Italia.

AMMORTAMENTO DEI PRESTITI DIVISI IN OBBLIGAZIONI

N	numero totale di obbligazioni emesse
C	valore nominale del prestito (importo sul quale vengono calcolati gli interessi)
C'	prezzo di emissione
C''_k	prezzo di rimborso
N_k	numero di obbligazioni estratte alla scadenza k
L_k	numero di obbligazioni viventi alla scadenza k
i	tasso del prestito
Ci	cedola

Si ha

$$NC' \text{ importo globale della somma raccolta}$$
$$N_1 + N_2 + ... + N_n = N$$
$$L_k = N_{k+1} + N_{k+2} + ... + N_n \qquad L_{n-1} = N_n$$

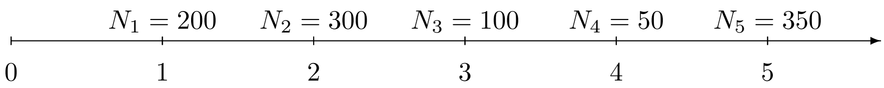
$$\begin{array}{ccccc} R_k & = & C_k & + & I_k \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & C''_k \cdot N_k & & Ci \cdot L_{k-1} \end{array} \quad \text{Rata di ammortamento pagata in } k$$

Un piano di ammortamento può essere definito:

1. stabilendo il numero di obbligazioni estratte ad ogni scadenza

2. stabilendo le rate costanti $R_k = R$

1. Le rate sono immediatamente determinate!
   ESEMPIO
   Un prestito di 1.000 obbligazioni viene rimborsato in 5 anni al tasso del 6% annuo. Le cedole vengono pagate annualmente e il numero di obbligazioni estratte alle varie scadenze è rispettivamente: 200, 300, 100, 50, 350. Sapendo che il prezzo di emissione è 90, il valore nominale è 100 e il prezzo di rimborso è 110, compilare il piano di ammortamento.



$$\begin{aligned}
L_0 &= 1.000 \\
L_1 &= 1.000 - 200 = 800 \\
L_2 &= 800 - 300 = 500 \\
L_3 &= 500 - 100 = 400 \\
L_4 &= 400 - 50 = 350 \\
L_5 &= 0 \\
R_1 &= C_1 + I_1 = N_1 \cdot 110 + L_0 \cdot 100 \cdot 0,06 = 22.000 + 6.000 = 28.000 \\
R_2 &= C_2 + I_2 = N_2 \cdot 110 + L_1 \cdot 100 \cdot 0,06 = 33.000 + 4.800 = 37.800 \\
R_3 &= C_3 + I_3 = N_3 \cdot 110 + L_2 \cdot 100 \cdot 0,06 = 11.000 + 3.000 = 14.000 \\
R_4 &= C_4 + I_4 = N_4 \cdot 110 + L_3 \cdot 100 \cdot 0,06 = 5.500 + 2.400 = 7.900 \\
R_5 &= C_5 + I_5 = N_5 \cdot 110 + L_4 \cdot 100 \cdot 0,06 = 38.500 + 2.100 = 40.600
\end{aligned}$$

k	R_k	I_k	C_k	N_k	L_k
0	-	-	-	-	1.000
1	28.000	6.000	22.000	200	800
2	37.800	4.800	33.000	300	500
3	14.000	3.000	11.000	100	400
4	7.900	2.400	5.500	50	350
5	40.600	2.100	38.500	350	-

2. Si calcola la rata R che servirebbe ad ammortizzare il debito a rate costanti
$$Ra_{n\rceil i} = NC''$$

tempo 1: rata teorica $\widetilde{R_1} = R$

$I_1 = N \cdot C \cdot i$

$\Rightarrow \widetilde{C_1} = R - I_1$

$\tilde{N}_1 = \frac{R-I_1}{C_1''} = \frac{\widetilde{C_1}}{C_1''} \Rightarrow N_1 = [\widetilde{N_1}]$

rata effettiva $R_1 = N_1 \cdot C_1'' + I_1$

la differenza tra rata teorica e rata effettiva dà il residuo

$r_1 = R - R_1$

che viene capitalizzato al tempo 2

$$R - R_1 = r_1 \longrightarrow r_1(1+i)$$

1 2

tempo 2: rata teorica $\widetilde{R_2} = R + r_1(1+i)$

$I_2 = L_1 \cdot C \cdot i$

$\Rightarrow \widetilde{C_2} = \widetilde{R_2} - I_2$

$\tilde{N}_2 = \frac{\widetilde{C_2}}{C_2''} \Rightarrow N_2 = [\widetilde{N_2}]$

$R_2 = N_2 \cdot C + I_2$

$r_2 = \widetilde{R_2} - R_2$

$r_2(1+i) = ...$ e così via...

Questa procedura si chiama 'metodo della gestione dei residui' e permette di ottenere una successione di rate R_k che sono circa di importo costante.

ESEMPIO

Viene emesso un prestito di 15.000 obbligazioni, V.N. 100, che paga cedole annuali al 12,5% con rimborso entro 10 anni. Prezzo di emissione= prezzo di rimborso=V.N.. Si rediga il piano di ammortamento a rate teoricamente costanti col metodo di gestione dei residui.

Valore del prestito: $15.000 \cdot 100 = 1.500.000$

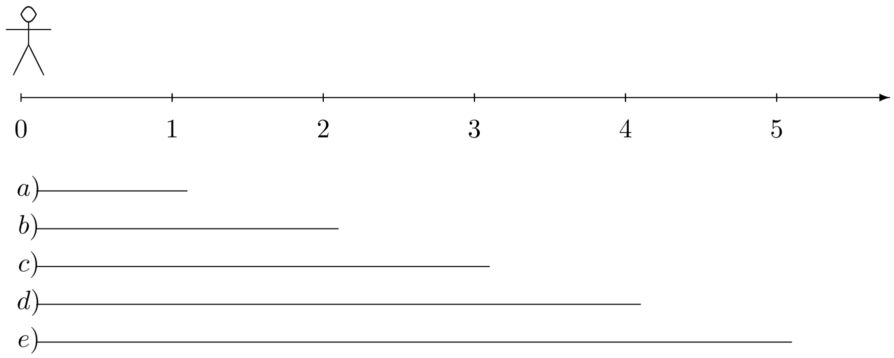
$$R = \frac{1.500.000}{a_{10\rceil 0,125}} = \frac{1.500.000}{\frac{1-(1+0,125)^{-10}}{0,125}} = 270.932,67$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R_1} &= R = 270.932,67 \\
I_1 &= NCi = 15.000 \cdot 100 \cdot 0,125 = 187.500 \\
\widetilde{C_1} &= \widetilde{R_1} - I_1 = 270.932,67 - 187.500 = 83.432,67 \\
\widetilde{N_1} &= \frac{\widetilde{C_1}}{100} = 834,3267 \qquad N_1 = 834 \qquad C_1 = 834 \cdot 100 = 83.400 \\
R_1 &= C_1 + I_1 = 187.500 + 83.400 = 270.900 \qquad r_1 = \widetilde{R_1} - R_1 = 32,67 \\
r_1(1+i) &= 32,67(1,125) = 36,75 \\
\widetilde{R_2} &= 36,75 + 270.9932,67 = 270.969,42 \\
L_1 &= N - N_1 = 15.000 - 834 = 14.166 \\
I_2 &= L_1 \cdot C \cdot i = 14.166 \cdot 100 \cdot 0,125 = 177.075 \\
\widetilde{C_2} &= \widetilde{R_2} - I_2 = 270.969,42 - 177.075 = 93.894,42 \\
\widetilde{N_2} &= \frac{\widetilde{C_2}}{100} = 938,9442 \qquad N_2 = 938 \\
C_2 &= 938 \cdot 100 = 93.800 \\
R_2 &= C_2 + I_2 = 93.800 + 177.075 = 270.875 \\
r_2 &= \widetilde{R_2} - R_2 = 270.969,42 - 270.875 = 94,42
\end{aligned}
$$

k	R_k	I_k	C_k	N_k	r_1	L_k
0	-	-	-	-	-	15.000
1	270.900	187.500	83.400	834	32.67	14.166
2	270.875	177.075	93.800	938	94.42	13.228
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

PROBLEMI PROBABILISTICI CONNESSI AI PRESTITI DIVISI IN OBBLIGAZIONI

Quando un'obbligazione fa parte di un debito che viene rimborsato gradualmente mediante estrazione a sorte, la data di rimborso non è nota a priori. Ne segue che la durata di vita di un'obbligazione è una variabile casuale. Se, ad esempio, un'obbligazione fa parte di un prestito che prevede il rimborso mediante estrazione a sorte su un arco di 5 anni, con estrazioni annuali, se consideriamo una obbligazione appena emessa (siamo al tempo zero), si possono verificare i seguenti 'scenari':



a) L'obbligazione viene rimborsata (estratta) al tempo 1 $\Rightarrow$ VITA RESIDUA $= 1$

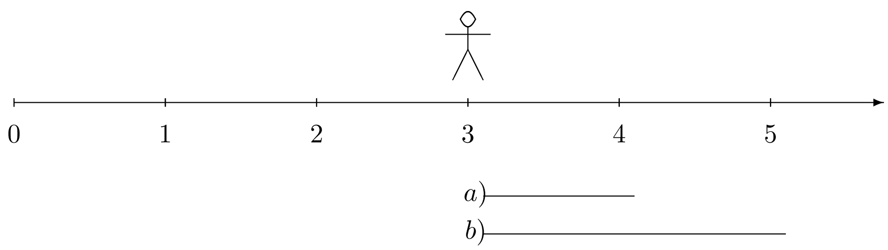
b) L'obbligazione viene rimborsata (estratta) al tempo 2 $\Rightarrow$ VITA RESIDUA $= 2$

c) L'obbligazione viene rimborsata (estratta) al tempo 3 $\Rightarrow$ VITA RESIDUA $= 3$

d L'obbligazione viene rimborsata (estratta) al tempo 4 $\Rightarrow$ VITA RESIDUA $= 4$

e) L'obbligazione viene rimborsata (estratta) al tempo 5 $\Rightarrow$ VITA RESIDUA $= 5$

Si può anche considerare una obbligazione (non ancora estratta, ovviamente) in qualsiasi momento del prestito

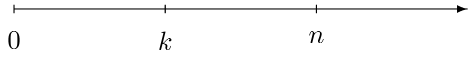


Se consideriamo l'obbligazione vivente in 3, i possibili scenari sono:

a) L'obbligazione viene rimborsata (estratta) al tempo 4 $\Rightarrow$ VITA RESIDUA $= 1$

b) L'obbligazione viene rimborsata (estratta) al tempo 5 $\Rightarrow$ VITA RESIDUA $= 2$

La VITA RESIDUA di una obbligazione vivente in età k è la variabile casuale che rappresenta il tempo che trascorrerà prima che l'obbligazione venga estratta:



$S = 1, 2, ..., (n - k)$
Avendo a disposizione il piano di rimborso, possiamo calcolare la probabilità di estrazione.

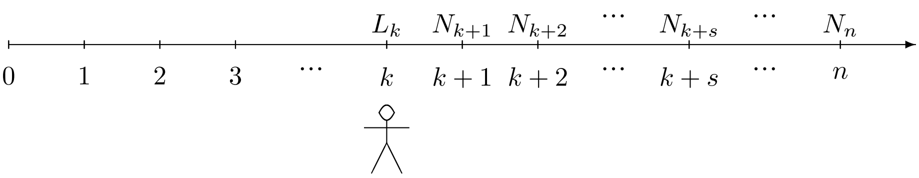
La PROBABILITÀ che una obbligazione vivente in età k sia estratta al tempo $(k+s)$, e quindi abbia vita residua pari a s, è data da:

$$p(k,k+s)=\frac{N_{k+s}}{L_k} \qquad s=1,2,...,n-k$$

Si ha:

$$\sum_{s=1}^{n-k} p(k,k+s)=\frac{N_{k+1}}{L_k}+\frac{N_{k+2}}{L_k}+...+\frac{N_n}{L_k}=\frac{N_{k+1}+N_{k+2}+...N_n}{L_k}=\frac{L_k}{L_k}=1$$

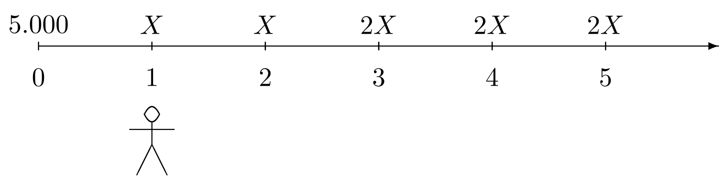
Si definisce VITA MEDIA di un'obbligazione il VALORE MEDIO -ATTESO-DELLA SUA VITA RESIDUA.
Vita media di un'obbligazione vivente in k: e_k.



$$\begin{aligned} e_k &= 1\frac{N_{k+1}}{L_k}+2\frac{N_{k+2}}{L_k}+...+s\frac{N_{k+s}}{L_k}+...+(n-k)\frac{N_n}{L_k}= \\ &= \sum_{s=1}^{n-k} s\frac{N_{k+s}}{L_k}=\frac{1}{L_k}\sum_{s=1}^{n-k} sN_{k+s} \end{aligned}$$

ESEMPIO

Un prestito di 5.000 obbligazioni viene ammortizzato in 5 anni mediante estrazione a sorte. Sapendo che il numero di obbligazioni estratte alle scadenze 1 e 2 sono uguali fra loro e pari ciascuna alla metà del numero delle obbligazioni estratte al tempo 3 (estratte in 4= estratte in 5= estratte in 3), calcolare la vita media di un'obbligazione vivente in 1.



$$
\begin{aligned}
N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 &= X + X + 2X + 2X + 2X = 5.000 \Rightarrow 8X = 5.000 \\
X = 625 = N_1 = N_2 & \qquad N_3 = N_4 = N_5 = 625 \cdot 2 = 1.250
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_1 &= 1\frac{625}{L_1} + 2\frac{1.250}{L_1} + 3\frac{1.250}{L_1} + 4\frac{1.250}{L_1} = \\
&= \frac{1}{4.375}\left[1 \cdot 625 + 2 \cdot 1.250 + 3 \cdot 1.250 + 4 \cdot 1.250\right] = 2.7142 \\
& \quad \text{2 anni, 8 mesi, 17 giorni}
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{2}{c}{\text{NUDA PROPRIETÀ}} & \multicolumn{2}{c}{\text{USUFRUTTO}} \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ \text{DEL} & \text{DI UNA} & \text{DEL} & \text{DI UNA} \\ \text{PRESTITO} & \text{OBBLIGAZIONE} & \text{PRESTITO} & \text{OBBLIGAZIONE} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\text{VALORE}} \\ \swarrow & \searrow \\ \text{DEL} & \text{DI UNA} \\ \text{PRESTITO} & \text{OBBLIGAZIONE} \end{array}$$

PRESTITO:
Per calcolare la nuda proprietà, usufrutto e valore del prestito ad una qualunque scadenza k del prestito al tasso di valutazione i', si procede come abbiamo già visto per i prestiti indivisi. Si tratta infatti di valutare alla scadenza k, rispettivamente:

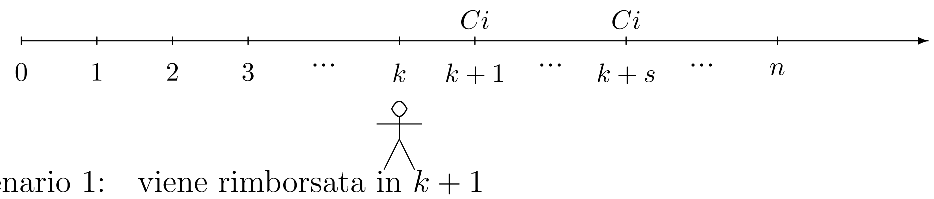
- le quote capitale
- le quote interessi
- le rate complessive

che l'ente emittente deve pagare dalla scadenza $(k+1)$ in poi.
ESEMPIO
Calcolare nell'esempio di pagina 4 la nuda proprietà, l'usufrutto e il valore del prestito alla scadenza 2, al tasso di valutazione del 7%.

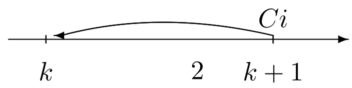
$$\begin{aligned} U_2^{0,07} &= 3.000(1+0,07)^{-1} + 2.400(1+0,07)^{-2} + 2.100(1+0,07)^{-3} = 6.614,21 \\ V_2^{0,07} &= 14.000(1+0,07)^{-1} + 7.900(1+0,07)^{-2} + 40.600(1+0,07)^{-3} = ... \\ A_2^{0,07} &= 11.000(1+0,07)^{-1} + 5.500(1+0,07)^{-2} + 38.500(1+0,07)^{-3} = 46.511,755 \end{aligned}$$

1 **OBBLIGAZIONE:**
Quando valutiamo nuda proprietà, usufrutto e valore in k di una singola obbligazione dobbiamo necessariamente calcolare dei VALORI ATTESI, dato che non possiamo sapere quando un'obbligazione verrà estratta e quindi fino

a quando godrà di cedole o quando si avrà il prezzo di rimborso!
USUFRUTTO $u_K^{(i')}$

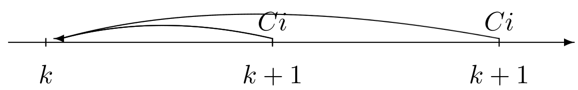


scenario 1: viene rimborsata in $k+1$



Valore in k delle cedole: $Ci(1+i')^{-1}$
Probabilità: $\frac{N_{k+1}}{L_k} = p(k, k+1)$

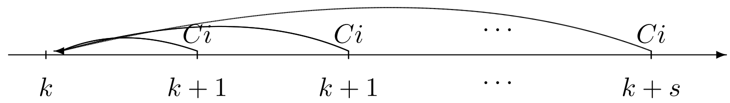
scenario 2: viene rimborsata in $k+2$



Valore in k delle cedole: $Cia_{2\rceil i'}$
Probabilità: $\frac{N_{k+2}}{L_k} = p(k, k+2)$

$\vdots$ $\vdots$

scenario s: viene rimborsata in $k+s$



Valore in k delle cedole: $Cia_{s\rceil i'}$
Probabilità: $\frac{N_{k+s}}{L_k} = p(k, k+s)$

Quindi si ha

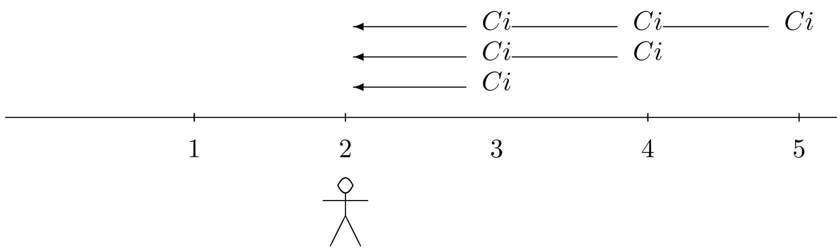
$$\begin{aligned} u_k^{(i')} &= Ci(1+i')^{-1}\frac{N_{k+1}}{L_k} + Cia_{2\rceil i'}\frac{N_{k+2}}{L_k} + ... \\ & ... + Cia_{s\rceil i'}\frac{N_{k+s}}{L_k} + ... + Cia_{n\rceil i'}\frac{N_n}{L_k} = \\ &= \sum_{s=1}^{n-k} Cia_{s\rceil i'}\frac{N_{k+s}}{L_k}. \end{aligned}$$

Esiste una relazione tra usufrutto del prestito ed usufrutto di una singola obbligazione: infatti si ha

$$\begin{aligned} u_k^{(i')} &= \sum_{s=1}^{n-k} Cia_{s\rceil i'}\frac{N_{k+s}}{L_k} = \frac{1}{L_k}\sum_{s=1}^{n-k} CiN_{k+s}a_{s\rceil i'} \\ &= \frac{1}{L_k}\sum_{s=1}^{n-k} I_{k+s}(1+i')^{-s} = \frac{1}{L_k}U_k^{(i')} \end{aligned}$$

ESEMPIO

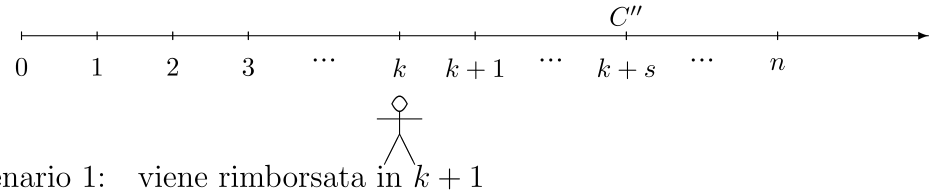
Nell'esempio precedente, calcolare l'usufrutto di una obbligazione vivente al tempo 2, al tasso di valutazione del 7%.



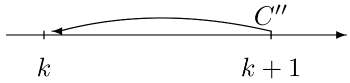
$$\begin{aligned} u_2^{(0,07)} &= Ci(1+0,07)^{-1}\frac{N_3}{L_2} + Cia_{2\rceil 0,07}\frac{N_4}{L_2} + Cia_{3\rceil 0,07}\frac{N_5}{L_2} = \\ &= 6(1,07)^{-1}\frac{100}{500} + 6\frac{1-(1,07)^{-2}}{0,07}\frac{50}{500} + 6\frac{1-(1,07)^{-3}}{0,07}\frac{350}{500} = \\ &= 1,1215 + 1,0848 + 11,0221 = 13,2284. \end{aligned}$$

NOTA BENE: $u_2^{(0,07)}L_2 = 13,2284 \cdot 500 = 6614,2 = U_2^{(0,07)}$.

NUDA PROPRIETA' $a_K^{(i')}$



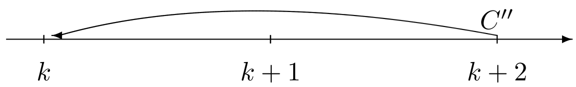
scenario 1: viene rimborsata in $k+1$



Valore in k del prezzo di rimborso: $C''(1+i')^{-1}$

Probabilità:$\frac{N_{k+1}}{L_k} = p(k, k+1)$

scenario 2: viene rimborsata in $k+2$

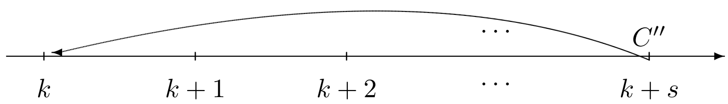


Valore in k del prezzo di rimborso: $C''(1+i')^{-2}$

Probabilità:$\frac{N_{k+2}}{L_k} = p(k, k+2)$

$\vdots$ $\vdots$

scenario s: viene rimborsata in $k+s$



Valore in k del prezzo di rimborso: $C''(1+i')^{-s}$

Probabilità:$\frac{N_{k+s}}{L_k} = p(k, k+s)$

Quindi si ha

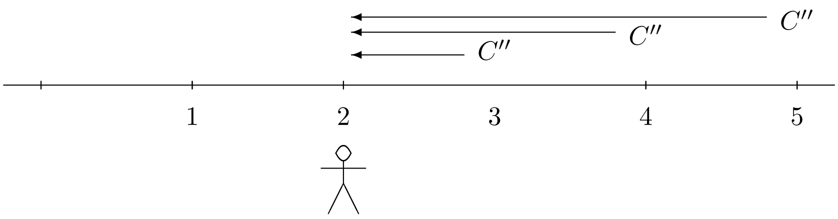
$$\begin{aligned} a_k^{(i')} &= C''(1+i')^{-1}p(k,k+1) + C''(1+i')^{-2}p(k,k+2) + ... \\ &\quad ... + C''(1+i')^{-s}p(k,k+s) + ... + C''(1+i')^{-(n-k)}p(k,n) = \\ &= C''(1+i')^{-1}\frac{N_{k+1}}{L_k} + C''(1+i')^{-2}\frac{N_{k+2}}{L_k} + ... \\ &\quad ... + C''(1+i')^{-s}\frac{N_{k+s}}{L_k} + ... + C''(1+i')^{-(n-k)}\frac{N_n}{L_k} = \\ &= \frac{1}{L_k}\sum_{s=1}^{n-k} C''(1+i')^{-s}N_{k+s}. \end{aligned}$$

Esiste una relazione tra nuda proprietà del prestito e nuda proprietà di una singola obbligazione

$$a_k^{(i')} = \frac{1}{L_k}\sum_{s=1}^{n-k} C''(1+i')^{-s}N_{k+s} = \frac{1}{L_k}\sum_{s=1}^{n-k} C_{k+s}(1+i')^{-s}N_{k+s} = \frac{1}{L_k}A_k^{(i')}$$

ESEMPIO

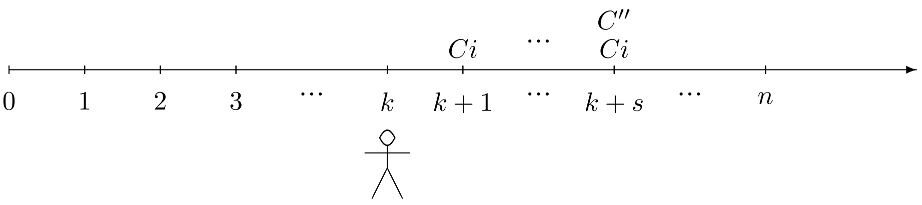
Nell'esempio precedente, calcolare la nuda proprietà di una obbligazione vivente al tempo 2, al tasso di valutazione del 7%.



$$\begin{aligned} a_2^{0,07} &= 110(1,07)^{-1}\frac{100}{500} + 110(1,07)^{-2}\frac{50}{500} + 110(1,07)^{-3}\frac{350}{500} = \\ &= 93,023 \end{aligned}$$

NOTA BENE: $a_2^{0,07} = 93,023 = \dfrac{A_2^{(0,07)}}{500} = \dfrac{46.511,755}{500}.$

VALORE DELL'OBBLIGAZIONE $v_K^{(i')}$



scenario 1: rimborso in $k+1$

Valore delle entrate: $Ci(1+i')^{-1} + C''(1+i')^{-1}$

Probabilità:$\frac{N_{k+1}}{L_k} = p(k, k+1)$

scenario 2: rimborso in $k+2$

Valore delle entrate: $Cia_{2\rceil i'} + C''(1+i')^{-2}$

Probabilità:$\frac{N_{k+2}}{L_k} = p(k, k+2)$

$\vdots \qquad \vdots$

scenario s: rimborso in $k+s$

Valore delle entrate: $Cia_{s\rceil i'} + C''(1+i')^{-s}$

Probabilità:$\frac{N_{k+s}}{L_k} = p(k, k+s)$

$$\begin{aligned}
v_k^{(i')} &= [Ci(1+i')^{-1} + C''(1+i')^{-1}]\frac{N_{k+1}}{L_k} + [Cia_{2\rceil i'} + C''(1+i')^{-2}]\frac{N_{k+2}}{L_k} + ... \\
&\quad ... + [Cia_{s\rceil i'} + C''(1+i')^{-s}]\frac{N_{k+s}}{L_k} + ... + [Cia_{n-k\rceil i'} + C''(1+i')^{-(n-k)}]\frac{N_n}{L_k} = \\
&= \sum_{s=1}^{n-k} [Cia_{s\rceil i'} + C''(1+i')^{-s}]\frac{N_{k+s}}{L_k}.
\end{aligned}$$

Capitolo 11

INDICI TEMPORALI

Consideriamo per convenzione sia $t = 0$ il tempo in cui effettuiamo la valutazione. Sia data una rendita di importi $R_1, R_2, ...R_n$ pagabili alle scadenze $t_1, t_2, ...t_n$. Può essere significativo estrarre dall'insieme delle date un INDICE SINTETICO per la distribuzione temporale dei capitali.

1) VITA A SCADENZA (o TIME TO MATURITY)

È l'indice più immediato e rappresenta il tempo che deve trascorrere fino alla fine della rendita.
t_n si indica con "Maturity".
Limite: non si considerano le rate intermedie e la loro distribuzione temporale

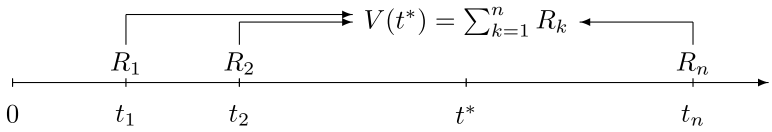
2) SCADENZA MEDIA ARITMETICA

$$\bar{t} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k}{\sum_{k=1}^{n} R_k}$$

È la media ponderata delle scadenze $(t_k - 0 = t_k)$ con pesi pari alle singole poste. Rappresenta la distanza dallo zero del baricentro della distribuzione delle rate sull'asse temporale.
Limite: non si usa nessuna legge di valutazione finanziaria.

3) SCADENZA MEDIA FINANZIARIA

È il tempo in cui la rendita vale quanto la somma algebrica dei suoi capitali



$$\begin{aligned} t^* : \quad & \left(\sum_{k=1}^{n} R_k v^{t_k}\right) r^{t^*} = \sum_{k=1}^{n} R_k \\ \Rightarrow t^* \quad = \quad & \frac{ln \sum_{k=1}^{n} R_k - ln \sum_{k=1}^{n} R_k v^{t_k}}{ln\, r} \end{aligned}$$

Si dimostra che al crescere del tasso, t^* decresce ed inoltre quando i tende a zero, t^* diventa la scadenza media aritmetica:

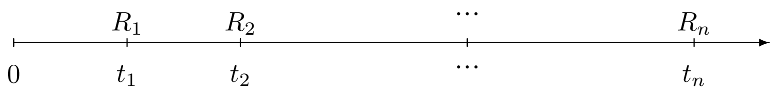
$$\text{se} \quad i = 0 \quad \Rightarrow F.I. \quad \frac{0}{0} \quad \Rightarrow \quad \text{DE L'HOSPITAL}$$

$$\begin{aligned} \lim_{i\to 0} \frac{\ln \sum_{k=1}^{n} R_k - \ln \sum_{k=1}^{n} R_k v^{t_k}}{\ln r} &= \lim_{i\to 0} \frac{0 - \frac{\sum_{k=1}^{n} R_k t_k v^{t_k - 1}(-v^2)}{\sum_{k=1}^{n} R_k v^{t_k}}}{\frac{1}{r}} \\ = \lim_{i\to 0} \frac{v \frac{\sum_{k=1}^{n} R_k t_k v^{t_k - 1}(v)}{\sum_{k=1}^{n} R_k v^{t_k}}}{v} &= \lim_{i\to 0} \frac{\sum R_k t_k v^{t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k v^{t_k}} \\ = \lim_{i\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} R_k t_k}{\sum_{k=1}^{n} R_k}. \end{aligned}$$

$$\left[\frac{d}{di}v = \frac{d}{di}(1+i)^{-1} = -(1+i)^{-2} = -v^2\right]$$

4)DURATION

Introdotta da Macaulay nel 1938, è un indice sintetico di grande importanza.

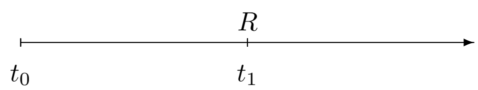


$$D_j(t_0) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_0)R_k(1+j)^{-(t_k-t_0)}}{\sum_{k=1}^{n} R_k(1+j)^{-(t_k-t_0)}}$$

Si tratta della media delle vite a scadenza delle poste del flusso, ponderata coi valori attuali delle singole poste. Anche in questo caso, si può vedere $D_j(t_0)$ come distanza da t_0 del baricentro della distribuzione temporale delle poste R_k. Si ha quindi

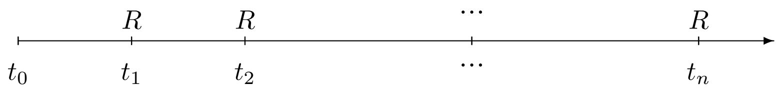
$$t_1 - t_0 \leq D_j(t_0) \leq t_n - t_0,$$

dato che il baricentro non può essere esterno al segmento in cui sono distribuite le poste. Se si utilizza un unico tasso per scontare tutte le poste, si parla di DURATION PIATTA.
ESEMPIO: progetto con una sola scadenza



$$D_j(t_0) = \frac{(t_1 - t_0)R(1+j)^{-(t_1-t_0)}}{R(1+j)^{-(t_1-t_0)}} = t_1 - t_0$$

ESEMPIO: rendita costante



$$\begin{aligned} D_j(t_0) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_0)R(1+j)^{-(t_k-t_0)}}{\sum_{k=1}^{n} R(1+j)^{-(t_k-t_0)}} &= \frac{R\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_0)(1+j)^{-(t_k-t_0)}}{R\sum_{k=1}^{n}(1+j)^{-(t_k-t_0)}} \\ = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_0)(1+j)^{-(t_k-t_0)}}{\sum_{k=1}^{n}(1+j)^{-(t_k-t_0)}} & \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ due rendite costanti con le stesse scadenze hanno la stessa duration.

DURATION MODIFICATA

Duration come misura della sensibilità del valore attuale di un progetto a variazioni del tasso

$$\begin{aligned} V_0(j) &= \sum_{k=1}^{n} R_k(1+j)^{-t_k} \\ \frac{d}{dj}V_0(j) &= -\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+j)^{-t_k-1} \\ &= -\frac{1}{1+j}\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+j)^{-t_k} \qquad \text{dato che } D(j) = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+j)^{-t_k}}{V(j)} \\ &= -\frac{1}{1+j}D(j)V(j) \\ \Rightarrow \frac{V_0'(j)}{V(j)} &= -\frac{1}{1+j}D(j) =: D_M(j) \quad \text{DURATION MODIFICATA} \end{aligned}$$

La duration modificata può essere usata, ad esempio, per studiare la variazione del prezzo di un titolo a variazioni di tasso.
PROPRIETA' DELLA DURATION
A parità di altre condizioni, la duration:

1. AUMENTA col numero delle sue scadenze, $M \uparrow \Rightarrow D \uparrow$

2. DIMINUISCE al crescere del tasso, $i \uparrow \Rightarrow D \downarrow$

Dimostrazione di 2.: $\frac{d}{dj}D(j) < 0$

$$D(j) = \sum_{k=1}^{n} t_k w_k \qquad w_k = \frac{R_k(1+j)^{-t_k}}{V_0}$$
$$0 < w_k < 1, \forall k \qquad \sum_{k=1}^{n} w_k = 1$$

Per cui w_k possono considerarsi probabilità della variabile aleatoria t_k
$\Rightarrow \ D = E(X)$

$$X = \{t_k, w_k\}$$

$$\frac{d}{dj}D(j) = \sum_{k=1}^{n} t_k \frac{d}{dj} w_k \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dj}w_k &= \frac{-t_k R_k(1+j)^{-t_k-1}V_0 - V_0' R_k(1+j)^{-t_k}}{V_0^2} \\ &= \frac{-(1+j)^{-1}t_k R_k(1+j)^{-t_k}V_0}{V_0^2} - \frac{V_0'}{V_0^2}R_k(1+j)^{-t_k}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d}{dj}D(j) &= \sum_{k=1}^{n} t_k \left[-(1+j)^{-1} \frac{t_k R_k (1+j)^{-t_k}}{V_0} - \frac{V_0'}{V_0^2} R_k (1+j)^{-t_k} \right] \\
&= -(1+j)^{-1} \sum_{k=1}^{n} t_k^2 \frac{R_k (1+j)^{-t_k}}{V_0} - \frac{V_0'}{V_0^2} \sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+j)^{-t_k} \\
&= -(1+j)^{-1} \sum_{k=1}^{n} t_k^2 w_k - (1+j)^{-1} D(j) \sum_{k=1}^{n} t_k \frac{R_k (1+j)^{-t_k}}{V_0} \\
&= -(1+j)^{-1} \sum_{k=1}^{n} t_k^2 w_k - (1+j)^{-1} D^2(j) \\
&= -(1+j)^{-1} \left[\underbrace{\sum_{k=1}^{n} t_k^2 w_k}_{E(X^2)} - \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} t_k^2 w_k \right)^2}_{E^2(X)} \right] \\
&\quad \left[E(X^2) - E^2(X) = \sigma^2(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 \right] \\
&= -(1+j)^{-1} \sum_{k=1}^{n} w_k (t_k - D)^2 \quad < 0 \qquad\qquad C.V.D.
\end{aligned}
$$

Capitolo 12

CRITERI DI SCELTA DEGLI INVESTIMENTI

I criteri di scelta consentono all'operatore di effettuare una scelta razionale tra due o pi operazioni finanziarie. Consideriamo operazioni finanziarie certe e discrete, cioè caratterizzate da capitali e scadenze noti con certezza e da un numero discreto di elementi. Un'operazione finanziaria è descritta da una coppia di vettori che rappresentano rispettivamente i flussi di cassa e le scadenze di tali flussi, $P = (\underline{F}, \underline{t})$

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \underline{t} = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} F_0 & F_1 & F_2 & \cdots & F_n \\ \hline t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{array}$$

I termini F_k $(k = 0, 1, 2, ..., n)$ esprimono i flussi di cassa derivanti dall'investimento e quindi possono assumere valori positivi o negativi.
Per esempio, nel problema di un prestito in $t = 0$ di un capitale C seguito dalle quote di un piano di ammortamento si avrà
$F_0 = -C$, $F_k = R_k$, $k \geqslant 1$, $R_k \geqslant 0$.

In generale: $F_k < 0$ rappresentante un costo
$F_k > 0$ rappresentante un ricavo.

DEF.: *Investimenti in senso stretto.*
Un investimento si dice in senso stretto se i costi precedono temporalmente i ricavi.

$$\begin{array}{ccccccc} F_0 < 0 & F_1 < 0 & \cdots & F_k < 0 & F_{k+1} > 0 & \cdots & F_n > 0 \\ \hline t_0 & t_1 & & t_k & t_{k+1} & & t_n \end{array}$$

DEF.: *Finanziamenti in senso stretto.*
Un finanziamento si dice in senso stretto se i ricavi precedono temporalmente i costi.

$$\begin{array}{ccccccc} F_0 > 0 & F_1 > 0 & \cdots & F_k > 0 & F_{k+1} < 0 & \cdots & F_n < 0 \\ \hline t_0 & t_1 & & t_k & t_{k+1} & & t_n \end{array}$$

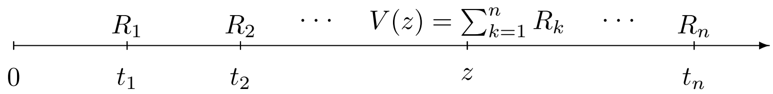
Prima di analizzare gli altri tipi di investimenti e finanziamenti, diamo le definizioni di scadenza media aritmetica e scadenza media finanziaria di una rendita.

DEF.: *Scadenza media aritmetica.*
La scadenza media aritmetica $\bar{t}$ di una rendita è la media delle scadenze, ponderata con i flussi. (N.B.: stiamo parlando di rendita, per cui i flussi sono tutti da considerarsi positivi!)

$$\begin{array}{cccccc} R_1 & R_2 & \cdots & R_k & \cdots & R_n \\ \hline t_1 & t_2 & & t_k & & t_n \end{array}$$

$$\bar{t} = \frac{t_1R_1 + t_2R_2 + \ldots + t_nR_n}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n}$$

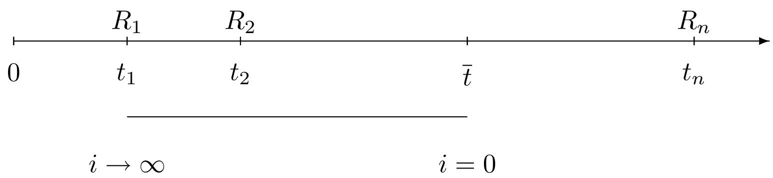
DEF.: *Scadenza media finanziaria di una rendita.*
La scadenza media finanziaria z di una rendita (in RIC) è il tempo in cui la rendita vale quanto la somma algebrica dei suoi capitali.



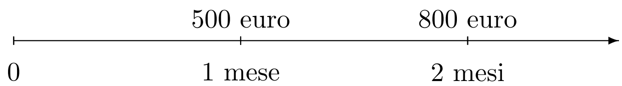
z si determina quindi risolvendo l'equazione:

$$(R_1 v^{t_1} + R_2 v^{t_2} + ... + R_n v^{t_n}) r^z = R_1 + R_2 + ... + R_n$$

La scadenza media z varia al variare del tasso ed il particolare è una funzione decrescente del tasso ($\frac{dz}{di} < 0$).
Il campo di variazione della scadenza media finanziaria è tra la scadenza della prima rata e la scadenza media aritmetica $\bar{t}$



Esempio: Si prevede di incassare 500 euro tra 1 mese e 800 euro tra 2 mesi. Qual è la scadenza media aritmetica e la scadenza media finanziaria al tasso annuo dell'8%?



$\bar{t} = \frac{\frac{1}{12}500 + \frac{2}{12}800}{500+800} = 0,1026$ (1 mese e 7 giorni)
$[500 \cdot 1,08^{-\frac{1}{12}} + 800 \cdot 1,08^{-\frac{2}{12}}] \cdot 1,08^z = 500 + 800 \longrightarrow z = 1$ mese e 18 giorni

DEF.: *Investimenti in senso generale.*
Un investimento si dice in senso generale quando la scadenza media finanziaria dei costi z_c precede la scadenza media finanziaria dei ricavi z_r, per qualunque tasso di valutazione $i > 0$.

DEF.: *Finanziamenti in senso generale.*
Un finanziamento si dice in senso generale quando la scadenza media finan-

ziaria dei ricavi z_c precede la scadenza media finanziaria dei costi z_r, per qualunque tasso di valutazione $i > 0$.

Se in un investimento la scadenza media aritmetica dei costi precede la scadenza del primo ricavo, è certo che, a qualunque tasso, la scadenza media finanziaria dei costi precederà la scadenza media dei ricavi, per cui un investimento in senso lato è anche un investimento in senso generale. D'altra parte se in un investimento i costi precedono temporalmente i ricavi, allora ovviamente la scadenza media aritmetica dei costi precederà il primo ricavo, per cui un investimneto in senso stretto è anche un investimento in senso lato.
Analogo discorso vale per i finanziamenti.
Si hanno quindi, considerando gli insiemi di investimenti considerati, le seguenti inclusioni:

$$\text{(I. senso stretto)} \subset \text{(I. senso lato)} \subset \text{(I. senso generale)}$$

Due progetti si possono sommare facendo l'unione delle scadenze e la somma dei capitali. Ad esempio, dati i due progetti A e C i cui capitali sono

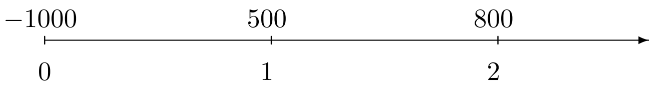
$$\underline{C_A} = \begin{pmatrix} -25 \\ +25 \\ +16 \\ -7 \end{pmatrix} \underline{t_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{C_C} = \begin{pmatrix} -10 \\ +2 \\ +10 \\ -7 \\ +13 \end{pmatrix} \underline{t_C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

il progetto A+C sar

$$\underline{C_C} = \begin{pmatrix} -35 \\ +25 \\ +18 \\ +3 \\ -7 \\ +13 \end{pmatrix} \underline{t_C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

Due progetti sono confrontabili quando hanno la stessa struttura relativamente al capitale ed alla durata. Consideriamo ad esempio i due progetti A e B:

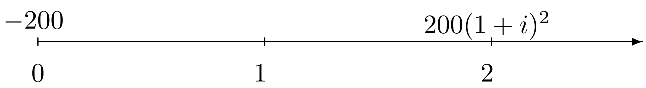
A



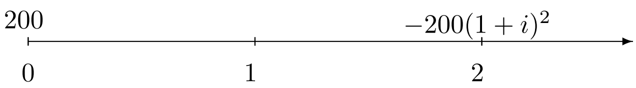
B

Se disponiamo di 1000, dobbiamo prendere in prestito 200 per potere affrontare B. Se disponiamo di 1200, dobbiamo trovare un altro impiego per i 200 rimanenti affrontando l'investimento A. I due progetti non sono confrontabili direttamente. E' necessario trovare investimenti integrativi A' e B' che, sommati ad A e B, li rendano confrontabili.

A'



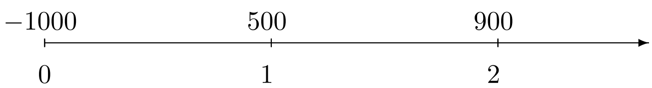
B'

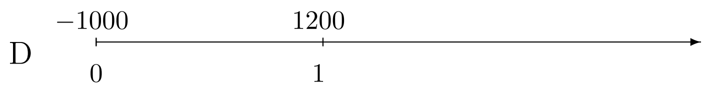


Se si possiede 1200, si confronteranno i progetti (A+A') e B.
Se si possiede 1000, si confronteranno i progetti A e (B+B').

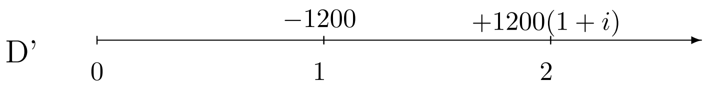
Vediamo i due progetti C e D:

C





I due progetti non sono confrontabili perch, pur richiedendo lo stesso importo iniziale, coprono orizzonti temporali differenti. Per poterli confrontare sar necessario integrare D con un ulteriore investimento che copra il periodo che va da 1 a 2.



Si potr confrontare C con (D+D').
La scelta tra progetti P consiste nel definire un criterio di scelta che associ ad ogni progetto P un numero $I(P) \in \Re$ detto indice di preferenza. Dati due progetti A e B, confrontabili, l'indice dovr essere tale che:
$I(A) > I(B) \Rightarrow A \succ B$ (A è preferito a B),
$I(A) < I(B) \Rightarrow A \prec B$ (B è preferito ad A),
$I(A) = I(B) \Rightarrow A \approx B$ (A e B sono indifferenti).
$\succ$ è la relazione di preferenza nelle scelte,
$\approx$ è la relazione di equivalenza nelle scelte.
L'ordinamento deve rispettare alcune propriet formali. L'equivalenza ($\approx$) è una relazione riflessiva ($A \approx A$), simmetrica ($A \approx B \Rightarrow B \approx A$), transitiva ($A \approx B, B \approx C \Rightarrow A \approx C$). La preferenza ($\succ$) è transitiva ($A \succ B, B \succ C \Rightarrow A \succ C$). Dati 3 progetti A, B e C, si ha che:
$A \succ B \Rightarrow (A + C) \succ (B + C)$
$A \approx B \Rightarrow (A + C) \approx (B + C)$
$A \succ B, \alpha > 0 \Rightarrow \alpha A \succ \alpha B$
$A \approx B, \alpha > 0 \Rightarrow \alpha A \approx \alpha B$

CRITERIO DEL TEMPO DI RECUPERO DEL CAPITALE

Si tratta di un criterio per confrontare due investimenti e rappresenta il tempo necessario a recuperare integralmente il capitale impiegato.
Definiamo saldo di cassa alla scadenza t_k la somma algebrica delle poste fino a t_k; il tempo di recupero di un investimento è la pima scadenza in cui si passa da saldi negativi a saldi non negativi. Tra due invetsimenti si sceglier quello con tempo di recupero del capitale minore.
Esempio: Siano dati i due progetti $A = (C_A, t_A)$ e $B = (C_B, t_B)$

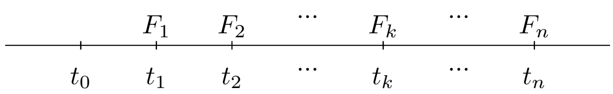
$$\underline{C_A} = \begin{pmatrix} -1000 \\ 300 \\ 400 \\ 500 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}, \underline{C_B} = \begin{pmatrix} -1000 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 400 \\ 800 \end{pmatrix}, \underline{t_A} = \underline{t_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

si scelga il progetto pi conveniente applicando il criterio del tempo di recupero.
Progetto A:
$S_0 = -1000$
$S_1 = -1000 + 300 = -700$
$S_2 = -700 + 400 = -300$
$S_3 = -300 + 500 = +200$
Il tempo di recupero di A è quindi 3.
Progetto B:
$S_0 = -1000$
$S_1 = -1000 + 200 = -800$
$S_2 = -800 + 200 = -600$
$S_3 = -600 + 200 = +400$
$S_4 = -400 + 400 = 0$
Il tempo di recupero di B è quindi 4, per cui $A \succ B$.

I limiti di questo criterio risiedono nel fatto che non si tiene conto della distribuzione dei costi e dei ricavi entro il tempo di recupero (due progetti possono avere lo stesso tempo di recupero ma distribuzioni diverse degli importi positivi e negativi) e non tiene per niente conto delle poste successive (un progetto pu avere poste positive dopo il tempo di recupero e non se ne tiene conto). Il criterio trova applicazione pratica soprattutto nella valutazione degli investimenti aleatori.

CRITERIO DEL R.E.A.

Fissato un tasso di valutazione j, si definisce R.E.A., Risultato Economico Attualizzato dell'investimento, il valore attuale dei flussi di cassa, valutati al tasso j, all'epoca $t = t_0$ inizio dell'operazione,



$$A(t_0, j) = \sum_{k=1}^{n} F_k (1 + j)^{-(t_k - t_0)}.$$

Dovendo scegliere tra più progetti alternativi di investimento, il criterio del R.E.A. premia quello che conduce al massimo valore attuale al tempo t_0. Se si tratta invece della valutazione di un finanziamento, il criterio va applicato scegliendo il progetto con il pi basso REA.
Un criterio di valutazione analogo consiste nell'effettuare la valutazione al termine dell'investimento. Tale criterio, il criterio del Risultato Economico Finale, fornisce gli stessi risultati, in termini di preferibilit tra progetti. Infatti, fissato un tasso di valutazione j ed assumento la legge scindibile, è chiaro che l'investimento con il pi alto valore attuale $A(t_0, j)$, risulter anche

avere il pi alto risultato finale $M(t_n, j)$.

$$M(t_n, j) = \sum_{k=1}^{n} F_k (1+j)^{-(t_n - t_k)}$$

Si tratta di criteri soggettivi in quanto la valutazione e quindi la scelta dipende dal tasso j usato.
Il REA è un operatore lineare, cio
$REA_{A+B} = REA_A + REA_B$
$REA_{\alpha A} = \alpha REA_A$, $\alpha \in \Re$.
Esempio. Si considerino le due seguenti operazioni A e B

$$\underline{C_A} = \begin{pmatrix} -1000 \\ +300 \\ +500 \\ +300 \\ +400 \end{pmatrix} \underline{t_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{C_B} = \begin{pmatrix} -1000 \\ +200 \\ +300 \\ +300 \\ +500 \end{pmatrix} \underline{t_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

Calcoliamo il REA dei due progetti in RIC al tasso periodale del 7%.
$REA_A(0,07) = -1000 + 300 \cdot 1,07^{-1} + 500 \cdot 1,07^{-2} + 300 \cdot 1,07^{-3} + 400 \cdot 1,07^{-4} = 267,141$
$REA_B(0,07) = -1000 + 200 \cdot 1,07^{-1} + 300 \cdot 1,07^{-2} + 300 \cdot 1,07^{-3} + 500 \cdot 1,07^{-4} = 75,2845$
$REA_A > REA_B \Rightarrow A \succ B$
Per verificare la linearit, calcoliamo il REA_{A+B}:

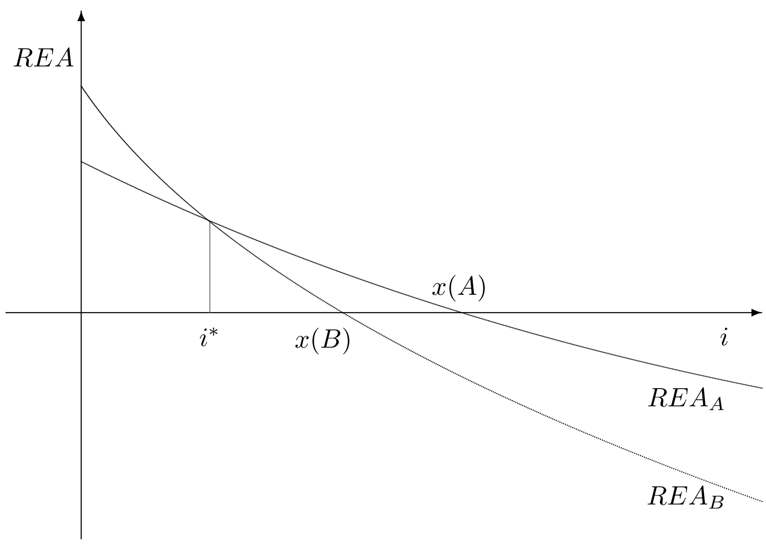
$$\underline{C_{A+B}} = \begin{pmatrix} -2000 \\ +500 \\ +800 \\ +600 \\ +900 \end{pmatrix} \underline{t_{A+B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$REA_{A+B}(0,07) = -2000 + 500 \cdot 1,07^{-1} + 800 \cdot 1,07^{-2} + 600 \cdot 1,07^{-3} + {} + 900 \cdot 1,07^{-4} = 342,4255 = REA_A(0,07) + REA_B(0,07)$
Se i progetti sembrano non confrontabili (per diversit di impieghi iniziali o

per durata), con il criterio del REA in realt si possono confrontare ocmunque se le operazioni integrative si possono fare allo stesso tasso al quale viene effettuata la valutazione del REA. Si pu quindi procedere al confronto diretto di progetti senza curarsi della loro completezza perch il REA delle operazioni integrative sar pari a zero. Supponiamo do dovere ocnfrontare due progetti A e B. Per renderli confrontabili è necessario considerare operazioni integrtaive: A' e B'. Se tali operazioni si svolgono allo stesso tassi al quale calcoliamo il REA, si ha ovviamente
$REA_{A'} = REA_{B'} = 0$.
Quindi, grazie alla propriet di linearit del REA si ha:
$REA_{A+A'} = REA_A + REA_{A'} = REA_A$
$REA_{B+B'} = REA_B + REA_{B'} = REA_B$
Se l'investimento è in senso stretto (costi precedono i ricavi) , la funzione che rappresenta il REA in funzione del tasso di valutazione è una funzione tale che
per $i = 0 \Rightarrow REA = \sum F_k$
$lim_{i \to +\infty} REA = F_0$
$\frac{d}{di} REA < 0$ (decrescente).

DIPENDENZA DAL TASSO i DI ATTUALIZZAZIONE E CARATTERE SOGGETTIVO DELLA SCELTA

L'adozione del criterio dell'attualizzazione richiede la fissassione di un tasso i di attualizzazione. Scelto dall'operatore in base alle sue condizioni finanziarie e alla sua particolare psicologia, il taSso di attualizzazione costituisce elemento determinante della decisione. La decisione assume quindi, carattere soggettivo.
Consideriamo ad esempio i R.E.A. di due investimenti A e B in funzione del tasso i di attualizzazione.



se $i < i^*$ B preferibile ad A
se $i = i^*$ progetti indifferenti
se $i > i^*$ A preferibile ad B

Nella scelta del tasso da utilizzare per la valutazione del REA, si tiene presente il tasso corrente per i finanziamenti, cioè il tasso in base al quale può essere preso a prestito il capitale occorrente per effettuare l'investimento, o il tasso di rendimento del capitale proprio,a seconda che il capitale per effet-

tuare l'investimento sia un capitale ottenuto per finanziamento o utilizzando capitale proprio.
Esempio. Consideriamo le due operazioni seguenti:

A. sostenimento di un costo di 1000 e la realizzazione dei ricavi di importo pari a 400 in 1, 300 in 2, 200 in 3, 40 in 4, 200 in 5.

B. sostenimento di un costo di 1000 e la realizzazione dei ricavi di importo pari a 200 in 1, 200 in 2, 200 in 3, 200 in 4 e 800 in 5.

$REA_A = -1000 + 400v + 300v^2 + 200v^3 + 400v^4 + 200v^5$
$REA_B = -1000 + 200a_{4\neg i} + 800v^5$

$$\begin{array}{llll} & \text{se } i = 0 & REA_A = 500 & REA_B = 600 \\ \text{Si ha:} & \text{se } i = 0,04 & REA_A = 346,09 & REA_B = 382,52 \\ & \text{se } i = 0,08 & REA_A = 216,47 & REA_B = 206,89 \end{array}$$

Si vede quindi che:

- a tasso nullo, B è preferita ad A

- al tasso del 4%, B è preferita ad A

- al tasso del 8%, A è preferita ad B

Esercizio. Un operatore finanziario deve operare una scelta tra le due operazioni:

A. sostenimento del costo di 1000 euro e la realizzazione dei seguenti ricavi: 200 in 1, 300 in 2, 100 in 3, 400 in 4, 500 in 5

B. sostenimento del costo di 1000 euro e la realizzazione dei seguenti ricavi: 200 in 1, 300 in 2, 100 in 3 e 4, 500 in 5

Determinare l'operazione preferibile in base al criterio del R.E.A., al tasso di valutazione del 6%.
Esercizio. Un'impresa necessita di un macchinario che costa 100, viene utilizzato un anno, che d ricavi stimati in 60 per trimestre. Al termine dell'anno la vendita del macchinario ustao d luogo ad un ricavo pari a 30.

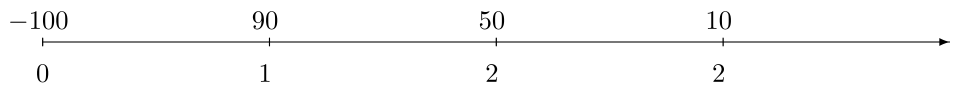
a) Valutare, con il criterio del REA, al tasso dell'8% trimestrale, se conviene l'acquisto in contanti o l'acquisto ocn 4 rate trimestrali anticipate, ciascuna di 35.

b) Sui flussi netti (positivi) l'impresa alla fine dell'anno paga imposte secondo l'aliquota α: si valuti per quali valori di α la scelta precedentemente effettuata resta inalterata.

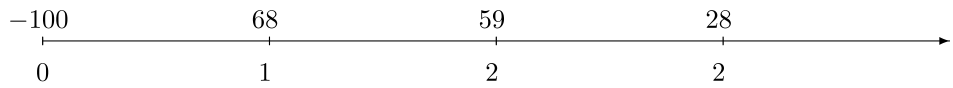
IL CRITERIO TRM

Come si è visto il criterio del R.E.A. si può chiamare criterio del massimo valore finale. Se il tasso di valutazione è fissato, confrontare i REA o i montanti al tempo t_n è lo stesso. Ma con questo criterio non si tiene in conto del fatto che le poste dei progetti possono essere positive o negative e ghe ipotizzare simmetria tra i tassi da applicare ai due tipi di investimento è irrealistico. Nella pratica finanziaria si usano generalmente tassi diversi, $i \neq j$ da applicare alle poste positive e negative.
In realtà nel criterio TRM (Teichorew, Robicheck, Montalbano) si considerano i saldi parziali ad ogni epoca t_k in quanto è il saldo a t_k che ci dice se , a quel tempo, si ha una quota $S < 0$ che paga interesse ad un saldo i oppure siano in una situazione di attivo, $S > 0$, ed i saldi stanno maturando interessi ad un tasso j.
Per calcolare il saldo finale S_n dell'epoca t_n procediamo iterativamente come segue:
$S_0 = F_0$
Per $k = 1, ..., n, \quad S_k = \begin{cases} S_{k-1}(1+i)^{t_k - t_{k-1}} + F_k & \text{se} \quad S_{k-1} \leq 0 \\ S_{k-1}(1+j)^{t_k - t_{k-1}} + F_k & \text{se} \quad S_{k-1} \geq 0 \end{cases}$
S_n è il saldo finale al tempo t_n. Fra i progetti di investimento sceglieranno quello avente massimo valore finale.
Esempio. Si considerino i due seguenti progetti A e B

A



B



Si valuti il progetto preferibile secondo il criterio TRM, considerando un tasso del 10% per i saldi positivi e del 15% per i saldi negativi.
Progetto A:
$S_0 = -100$
$S_1 = -100 \cdot 1,15 + 90 = -25$
$S_2 = -25 \cdot 1,15 + 50 = 21,25$
$S_3 = 21,25 \cdot 1,10 + 10 = 33,375 = S_A$
Progetto B:
$S_0 = -100$
$S_1 = -100 \cdot 1,15 + 68 = -47$
$S_2 = -47 \cdot 1,15 + 59 = 4,95$
$S_3 = 4,95 \cdot 1,10 + 28 = 33,445 = S_B$
$S_A > S_B \Rightarrow B \succ A$

CRITERIO DEL T.I.R., TASSO INTERNO DI RENDIMENTO

Riprendiamo la valutazione in t_0 di un assegnato flusso finanziario $\{F_k, t_k\}$ $k = 0, 1, ..., n$. Il REA, calcolato al tempo t_0, dipende dal tasso di valutazione usato

$$A(j) = \sum_{k=0}^{n} F_k v^{t_n - t_0)}$$

È opportuno studiare come varia il REA al variare di j, $j > 0$.
Se $j = 0$ $A(j) = \sum_{k=0}^{n} F_k > 0$
si suppone sia $A(0) > 0$ in quanto in un problema di investimento i ricavi superano i costi.
Si ha poi

$$\lim_{j \to +\infty} A(j) = F_0 < 0$$

in quanto in un investimento la prima posta è negativa.
Dato che $A(j)$ è una funzione continua di j, esiste almeno un valore $j*$ per cui il REA si annulla.

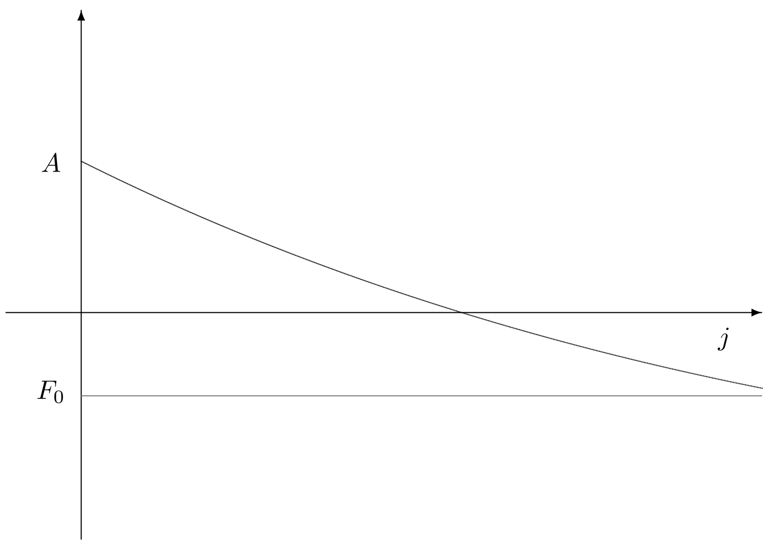
$$A(j*) = 0$$

Se questo esiste ed è unico si chiama TIR, tasso interno di rendimento o tasso implicito.
DEF.: *Tasso interno di rendimento.*
Si definisce tasso interno di rendimento di un'operazione finanziaria il valore $j*$, se esiste ed è unico, tale che $A(j*) = 0$
Una condizione sufficiente affinchè esista il TIR di una operazione finanziaria è che $A(j)$ sia strettamente decrescente, quindi

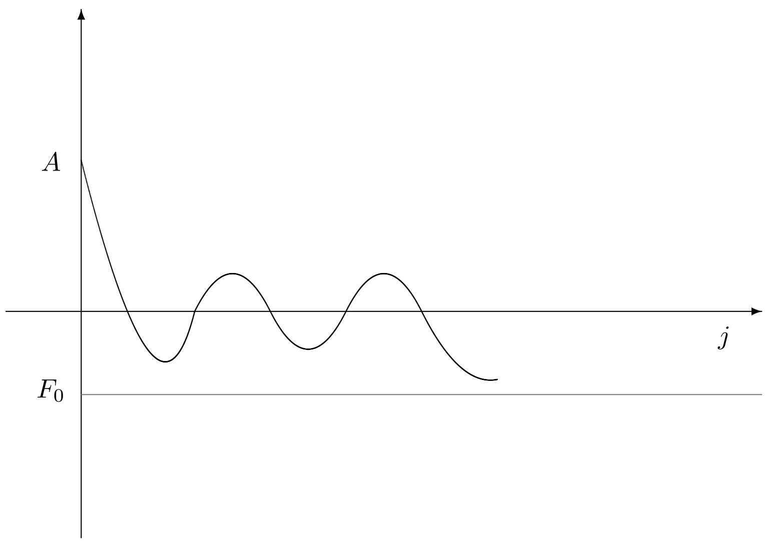
$$\frac{d}{dj} A(j) < 0$$

$$\frac{d}{dj} A(j) = -\frac{1}{1+j} \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k(t_k - t_0}{(1+j)^{t_k - t_0}}$$

Si può vedere che la derivata è sicuramente negativa nei flussi di cassa aventi segni del tipo - + + ... +.
In altre situazioni si possono avere più valori per i quali si annulla $A(j)$.



caso: j unico



caso: più valori di j

Esempio: Si determini il tasso interno di rendimento dell'operazione finanziaria definita dai seguenti flussi di cassa

-1000	620	560
0	1	2

$$V(i*) = -1000 + 620(1 + i*)^{-1} + 560(1 + i*)^{-2} = 0$$

$x := \frac{1}{1+i*}$

$-50 + 31x + 28x^2 = 0$

$28x^2 + 31x - 50 = 0$

$x_1 = 0,89285 \Rightarrow i* = 0,12$

$x_2 = -2 \Rightarrow i* = -1,50$ non accettabile

In alcuni casi il TIR pu non esistere o possono essere pi di uno i tassi che annullano il REA. Vediamo degli esempi.

Esempio. Si consideri l'investimento $A(C_A, t_A)$

$$\underline{C_A} = \begin{pmatrix} -100 \\ +120 \\ -40 \end{pmatrix} \underline{t_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$V_A(i) = -100 + \frac{120}{1+i} - \frac{40}{(1+i)^2} = 0$ Qualunque sia il tasso di valutazione, si ottiene un valore $V < 0$. Infatto l'equazione non ha soluzioni reali: $(1+i)^(- 1) = x$

$-100 + 120x - 40x^2 = 0$

$x = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4000}}{-40}$

Esempio. Si consideri l'investimento $B(C_B, t_B)$

$$\underline{C_B} = \begin{pmatrix} -48 \\ +140 \\ -100 \end{pmatrix} \underline{t_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$V_B(i) = -48 + \frac{140}{1+i} - \frac{100}{(1+i)^2} = 0$ $x := \frac{1}{1+i*}$

$-25x^2 + 35x - 12 = 0$

$x_1 = \frac{3}{5} \Rightarrow i* = 0,6666$

$x_2 = \frac{4}{5} \Rightarrow i* = 0,25$

Le soluzioni sono entrambe accettabili, per cui, essendo due i valori che annullano il REA, non esiste tasso interno di rendimento.

Si pu dimostrare che quando un investimento termina con un costo (come pu verificarsi ad esempio quando si devono pagare delle imposte), non possiede mai 1 solo tasso che annulli il REA: o ne ha zero, o ne ha almeno due. E' necessario individuare delle condizioni che garantiscano l'esistenza di un unico tasso. Valgono i seguenti teoremi:

Teorema di Levi.

Data un'operazione finanziaria che d luogo alle uscite U_s alle scadenze t_s, $(s = 1, 2, ..., m)$ e alle entrate E_k alle scadenze τ_s, $(s = 1, 2, ..., m)$ e tale che $\sum_{k=1}^{n} E_k > \sum_{s=1}^{m} U_s$, condizione sufficiente di esistenza del TIR è che la scedenza media delle uscite preceda la prima entrata, cio sia un investimento in senso lato.

Esempio. Si consideri l'investimento $A(C_A, t_A)$

$$\underline{C_A} = \begin{pmatrix} -2000 \\ +2600 \\ -1000 \\ +3000 \\ 600 \end{pmatrix} \underline{t_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$\bar{t}(U) = \frac{0 \cdot 2000) + 2 \cdot 1000}{2000+1000} = 0, \overline{6} < 1$

La condizione del teorema di Levi è soddisfatta per cui il tasso che annulla il REA è unico, quindi il TIR esiste.

Teorema di NORSTROM.

Indicato con $S(t)$ il saldo in t di un'operazione finanziaria, se $S(0) < 0$ e se $S(t)$ cambia segno una sola volta, allora esiste un solo tasso $i* > 0$ per il quale $V(i*) = 0$.

Esempio.

Si consideri l'investimento $B(C_B, t_B)$

$$\underline{C_B} = \begin{pmatrix} -2000 \\ +2600 \\ +1000 \\ +3000 \\ -400 \\ 6000 \end{pmatrix} \underline{t_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix},$$

La condizione del teorema di Levi non è verificata, infatti:

$\bar{t}(U) = \frac{0 \cdot (2000) + 7 \cdot (400)}{2000+400} = 1, 16 > 1$

La condizione del teorema di Norstrom risulta invece verificata, infatti il

saldo cambia segno una sola volta:
$S_0 = -2000 < 0$
$S_1 = -2000 + 2600 = 600 > 0$
$S_2 = 600 + 1000 = 1600 > 0$
$S_3 = 1600 + 3000 = 4600 > 0$
$S_4 = 4600 > 0$
$S_5 = 4600 > 0$
$S_6 = 4600 > 0$
$S_7 = 4600 - 400 = 4200 > 0$
$S_8 = 4200 + 6000 = 10200 > 0$
quindi il TIR esiste.

T.A.N. e T.A.E.G.

Si tratta di acronimi recentemente entrati in uso nella pratica dei finanziamenti concessi. Il primo è il Tasso Annuo Nominale. E' espresso il percentuale e su basi annua. Corrisponde al TIR dell'operazione finanziaria nella quale vengono ocnsiderati unicamente gli esborsi richiesti per la restituzione (quote capitale) e remunerazione (quote interesse) del debito. Non compaiono tra i flussi di cassa n le spese n altri accessori. Si tratta quindi di una valutazione ottimistica del costo reale di un finanziamento.
Il T.A.E.G. è invece il tasso Annuo Effettivo Globale e rappresenta il TIR dell'operazione di finanziamento, tenendo in considerazione anche tutti gli oneri accessori. Rappresenta un indicatore completo del costo del finanziamento.

Capitolo 13

STRUTTURA PER SCADENZA DEI PREZZI E DEI TASSI

Il principio di equivalenza finanziaria, trattato come principio base della quantificazione delle prestazioni e controprestazioni in una singola operazione finanziaria equa, assume il ruolo di requisito fondamentale per garantire la consistenza e la razionalit dei mercati finanziari in un mercato visto complessivamente.
Consideriamo il mercato dei titoli obbligazionari. Un titolo obbligazionario un contratto in cui due parti stabiliscono di scambiarsi denaro in date diverse. Le quantit di denaro sono note con certezza nel momento il cui il contratto viene sottoscritto e non esistono rischi di insolvenza (il mercato che consideriamo quindi un mercato privo di rischio di default). I titoli obbligazionari sono trasferibili: il detentore di una obbligazione pu vendere il titolo ad un terzo individuo indipendentemente dalla volont dell'emittente, che diventer quindi debitore verso il nuovo possessore. La trasferibilit d origine al mercato obbligazionario (secondario) dove avvengono i trasferimenti e si formano i prezzi di scambio.
Consideriamo un mercato finanziario in cui si trattano solo titoli obbligazio-

nari. Le caratteristiche sono:

- *Non frizionalit*
  - titoli infinitamente divisibili per cui non esistono quantit minime o massime di titoli trattati
  - non ci sono costi di transazione o gravami fiscali
  - sono consentite vendite allo scoperto, cio vendere titoli che non si possiedono (equivale a dire che si possono assumere posizione di debitore)
  - non c' rischio di insolvenza (default risk)
- *Competitivit*
  - gli agenti sono massimizzatori di profitto (principio di non saziet per cui preferiscono il pi al meno)
  - gli agenti sono price taker, cio con la loro attivit non possono influenzare i prezzi.
- *Assenza di arbitaggi.* In un contesto di certezza, come quello in cui ci troviamo, un arbitraggio una transazione che garantisce un flusso di pagamenti non negativi con almeno un pagamento strettamente positivo. Una delle due parti quindi incassa sempre senza pagare mai, per cui il vettore dei capitali di prestazioni e controprestazioni contiene poste tutte dello stesso segno:

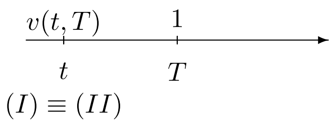
$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_0 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ \vdots \\ x_s > 0 \\ \vdots \\ x_n \geq 0 \end{pmatrix} \underline{t} = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_s \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

I contratti di compravendita si distinguono in contratti *a pronti* (o *spot*) e contratti *a termine* (o *forward*). Si differenziano per le scadenze temporali dei momenti del contratto. Infatti, possiamo distinguere tra

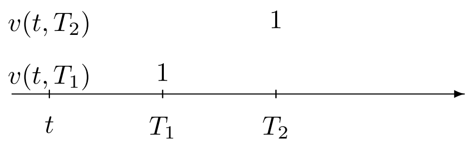
(I) il momento della stipula del contratto (il momento in cui le parti si accordano e fissano le condizioni della compravendita);

(II) il momento del pagamento del prezzo e della consegna del titolo (momento a partire dal quale il nuovo proprietario comincia a ricevere i frutti del titolo).

Nel contratto a pronti il momento (I) ed il momento (II) sono contestuali.
Nel contratto a termine il momento (I) precede il momento (II).
Si parla di *prezzi a pronti* (o *prezzi spot*) e di *prezzi a termine* (o *prezzi forward*) a seconda che si riferiscano a contratti a pronti o contratti a termine.
Se valgono le ipotesi di mercato che abbiamo precedentemente visto, devono valere particolari relazioni che tra prezzi a pronti alle varie scadenze e prezzi a termine: quindi possibile parlare di struttura dei prezzi e della corrispondente struttura dei tassi.
Consideriamo un mercato formato da titoli a cedola nulla (Zero Coupon Bond ZCB), cio titoli di puro sconto che garantisco il pagamento del valore facciale a scadenza. Date le ipotesi di mercato, valutiamo titoli con valore facciale unitario. Se uno ZCB viene scambiato con un contratto a pronti, indichiamo con $v(t,T)$ il prezzo in t (momento a) e b)) di un titolo che garantisce un flusso in entrata di 1 alla sua scadenza $T > t$.



Ipotizzando rendimentei positivi, si dovr avere $v(t,T) < 1$ e, ovviamente, $v(T,T) = 1$. Per garantire l'assenza di arbitraggi, i prezzi a pronti al tempo t di due ZCB aventi scadenze diverse T_1 e T_2, $T_1 < T_2$, devono rispettare la relazione $v(t,T_2) < v(t,T_1)$

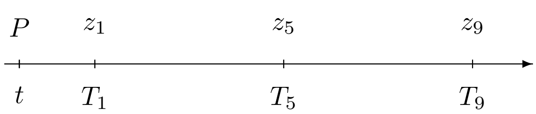


Esempio: Supponiamo di osservare sul mercato i seguenti prezzi a pronti: $v(0,5) = 0,92$, $v(0,8) = 0,98$. In questo caso, possibile costruire un arbitraggio: al tempo 0 vendo allo scoperto lo ZCB con scadenza 8 (incassando 0,98) ed acquisto lo ZCB con scadenza 5 (spendendo 0,92), ottenendo quindi un saldo di 0,06. Al tempo 5, per coprire l'uscita che avr al tempo 8, acquisto uno ZCB di prezzo $v(5,8) < 1$. In questo modo ho realizzato un arbitraggio, cio una entrata senza mai avere uscite.

t=0	t=5	t=8
$+v(0,8) = +0,98$		-1
$-v(0,5) = -0,92$	$+1$	
	$-v(5,8)$	$+1$
$+0,06$	> 0	$= 0$

Se sul mercato ideale appena descritto sono presenti titoli obbligazionari per qualsiasi scadenza, allora l'insieme dei prezzi $v(t,T_k)$ rappresenta la struttura per scadenza dei prezzi a pronti: qualunque contratto venga stipulato su tale mercato, deve rispettare tale struttura dei prezzi affinch non avvengano arbitraggi. I valori $v(t,T_k)$ rappresentano i fattori di sconto e qualunque altro titolo sul mercato pu essere prezzato utilizzando i prezzi delle obbligazioni. Ad esempio, il prezzo al tempo t di un titolo che garantisce i flussi z_1 al tempo T_1, z_5 al tempo T_5, z_9 al tempo T_9, avr prezzo

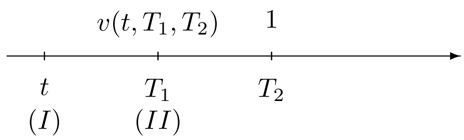
$$P = z_1 \cdot v(t,T_1) + z_5 \cdot v(t,T_5) + z_9 \cdot v(t,T_9)$$



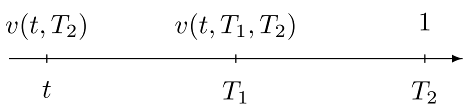
Dalla struttura dei prezzi a pronti possiamo quindi ricavare la *struttura dei* *tassi a pronti* $i(0,t)$:

$$v(0,1) = [1 + i(0,1)]^{-1} \Rightarrow i(0,1) = v(0,1)^{-1} - 1$$
$$v(0,2) = [1 + i(0,2)]^{-2} \Rightarrow i(0,2) = v(0,2)^{-2} - 1 \ldots$$
$$\ldots$$
$$v(0,n) = [1 + i(0,n)]^{-n} \Rightarrow i(0,n) = v(0,n)^{-n} - 1$$

Consideriamo adesso una *operazione a termine*. Al tempo t avviene l'accordo per la compravendita di un titolo unitario che scade al tempo $T_2 > t$. Il contratto a termine, quindi la consegna del titolo e la corresponsione del prezzo (momento II) avvengono ad un tempo T_1, $t < T_1 < T_2$ (ovviamente il momento della consegna deve precedere la scadenza del titolo!). Indichiamo con $v(t, T_1, T_2)$ il prezzo.



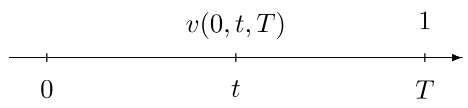
L'esistenza di una struttura dei prezzi a pronti e la condizione di non arbitraggio definiscono implicitamente i prezzi dei titoli venduti con contratti a termine. Infatti, consideriamo un titolo che scade in T_2. Se viene acquistato con contratto a pronti in t, il suo valore in t $v(t, T_2)$. Lo stesso titolo, se viene acquistato a termine al tempo t, con consegna in $T_1 < T_2$, varr, in T_1, $v(t, T_1, T_2)$.



I valori $v(t, T_2)$ e $v(t, T_1, T_2)$ dovranno necessariamente essere equivalenti, per cui $v(t, T_1, T_2)$ scontato al tempo t con il fattore di sconto $v(t, T_1)$ dovr valere $v(t, T_2)$:

$$v(t, T_1, T_2) \cdot v(t, T_1) = v(t, T_2) \Rightarrow v(t, T_1, T_2) = \frac{v(t, T_2)}{v(t, T_1)}$$

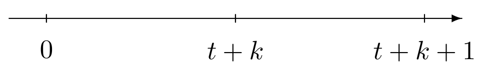
Se cos non fosse, ci sarebbero opportunit di arbitraggio.
La struttura dei prezzi a pronti osservati sul mercato ad una determinata scadenza, determina quindi implicitamente la *struttura dei prezzi a termine*.
I prezzi a termine rappresentano i fattori di sconto su intervalli di tempo differiti nel tempo rispetto al momento di osservazione.



Si ricavano quindi i *tassi a termine*, detti anche *tassi forward* o *tassi impliciti*:

$$v(0,t,T) = [1 + i(0,t,T)]^{-(T-t)} \Rightarrow i(0,t,T) = v(0,t,T)^{-\frac{1}{T-t}} - 1$$

Se consideriamo uno scadenziario discreto e di ampiezza unitaria, e due scadenze consecutive, si ha:



$$v(t,t+k,t+k+1) \cdot v(t,t+k) = v(t,t+k+1)$$

$$[1 + i(t,t+k,t+k+1)]^{-1} \cdot [1 + i(t,t+k)]^{-k} = [1 + i(t,t+k+1)]^{-(k+1)}$$

$$1 + i(t,t+k,t+k+1) = [1 + i(t,t+k+1)] \cdot \left(\frac{1 + i(t,t+k+1)}{1 + i(t,t+k)} \right)^{k}$$

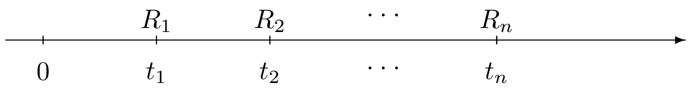
Il termine in parentesi tonda, se la struttura a pronti crescente, risulta essere maggiore di 1, per cui si dice che la curva dei tassi impliciti domina quella dei tassi a pronti. Se la struttura dei tassi spot invece decrescente, la curva dei tassi spot domina la curva dei tassi forward.

Capitolo 14

IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA

Consideriamo un investimento le cui entrate sono rappresentate dalla coppia di vettori $P = (\underline{R}, \underline{t})$

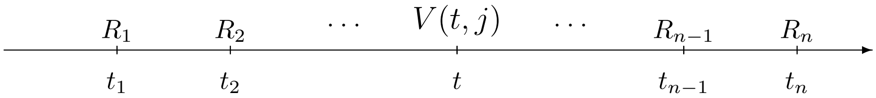
$$\underline{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \underline{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$



Ipotizziamo una struttura per scadenze piatta per cui il valore al tempo 0 delle entrate prevste per tale investimento

$$P = R_1 \cdot (1+i)^{-t_1} + R_2 \cdot (1+i)^{-t_2} + \ldots + R_n \cdot (1+i)^{-t_n}$$

dove i il tasso vigente al tempo 0. La valutazione di tali flussi, in qualsiasi momento di vita dell'investimento (o al suo termine) condizionata da modifiche del tasso di mercato. Supponiamo che il tasso vari una sola volta, prima della scadenza t_1, passando da i a j. Il valore $V(t, j)$ in un qualsiasi momento t successivo al momento di variazione del tasso sar:



$$V(t,j) = \sum_{t_s<t} R_s(1+j)^{t-t_s} + \sum_{t_s>t} R_s(1+j)^{-(t_s-t)} = \sum_{s} R_s(1+j)^{t-t_s}$$

Se indichiamo con

$$M(t,j) := \sum_{t_s<t} R_s(1+j)^{t-t_s}$$

$$P(t,j) := \sum_{t_s>t} R_s(1+j)^{-(t_s-t)}$$

si ha che $M(t,j)$ rappresenta il frutto del reinvestimento delle poste gi incassate al tempo t e $P(t,j)$ rappresenta il valore delle poste che devono ancora scadere, quindi la valutazione della cessione dell'investimento:

$$V(t,j) = M(t,j) + P(t,j).$$

Le variazioni di tasso hanno effetti opposti su M e P:

$$j \uparrow \Rightarrow \begin{cases} M \uparrow \\ P \downarrow \end{cases} \qquad j \downarrow \Rightarrow \begin{cases} M \downarrow \\ P \uparrow \end{cases}$$

Gli effetti saranno tanto maggiori quante pi sono le poste coinvolte in M e P. Supponiamo che j aumenti. Se t piccolo (ha senso ipotizzare $t > t_1$, altrimenti $M(t,j) = 0$ comunque) sar pi forte l'effetto di diminuzione di P rispetto a quello di crescita di M. Le perdite, quindi, che si subiscono cedendo l'investimento non sono compensate dai maggiori flussi di reinvestimento. Per ragioni opposte, al crescere di t i guadagni da reinvestimento arriveranno a coprire le perdite su P fino a superarle. E' intuitivo pensare che esista un tempo in cui questi due effetti si controbilancino e si annullino a vicenda, lasciando inalterato il valore dell'investimento. Se il tasso tra 0 e t rimanesse invariato, si avrebbe in t il valore $V(t,i)$. Tale valore ovviamente noto al momento di osservazione 0, mentre non noto il valore $V(t,j)$ poich, ovviamente, al tempo 0 non si conosce ancora il tasso j. Sarebbe auspicabile che il valore $V(t,j)$ non fosse pi basso del valore noto al tempo 0, $V(t,i)$! In base all'intuizione di prima, vediamo se esiste un tempo in cui $V(t,j)$ (come funzione di j) abbia valore minimo per $j=i$. Se cos accade, in tale tempo, per qualsiasi j si ha

$$V(t,j) \geq V(t,i).$$

La condizione del I ordine perch ci accada che, derivano la

$$\left.\frac{\partial V}{\partial j}\right|_{j=i} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial j} = \sum_{s=1}^{n}(t-t_s)R_s(1+j)^{t-t_s-1}$$

Calcolata in $j=i$ e posta $=0$ diventa

$$\sum_{s=1}^{n}(t-t_s)R_s(1+i)^{t-t_s-1} = 0 \qquad /(1+i)^{t-1}$$

$$\sum_{s=1}^{n} tR_s(1+i)^{-t_s} - \sum_{s=1}^{n} t_sR_s(1+i)^{-t_s} = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{\sum_{s=1}^{n} t_sR_s(1+i)^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} tR_s(1+i)^{-t_s}} = D_0(i)$$

Il tempo candidato ad essere valore minimo della funzione valore per $j=i$ dato dalla Duration calcolata al tempo 0, al tasso i. Perch si tratti di un punto di minimo necessario verificare la condizione del II ordine:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial j^2} = \sum_{s=1}^{n}(t-t_s)(t-t_s-1)R_s(1+j)^{t-t_s-2}$$

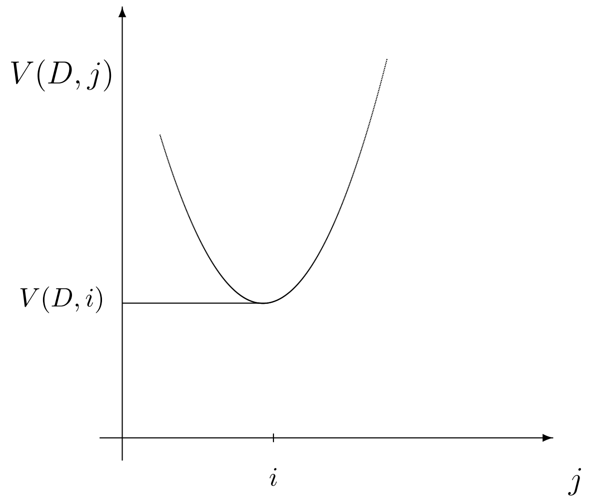
deve risultare >0, calcolata in $j=i$, $t=D_0(i)$. Verifichiamo:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial j^2}\right|_{j=i,t=D} = \sum_{s=1}^{n}(D-t_s)(D-t_s-1)R_s(1+i)^{D-t_s-2} =$$

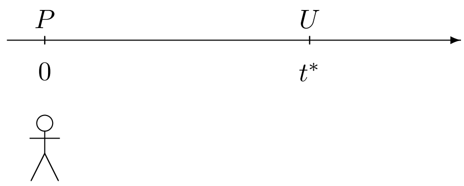
$$= \sum_{s=1}^{n}(D-t_s)^2R_s(1+i)^{D-t_s-2} - \sum_{s=1}^{n}(D-t_s)R_s(1+i)^{D-t_s-2} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} (D - t_s)^2 R_s (1+i)^{D-t_s-2} - (1+i)^{-1} \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial j}\right|_{j=i,\, t=D} > 0$$

dato che il secondo addendo pari a 0 ed il primo positivo. Se ne deduce che la funzione $V(t,j)$ ha un minimo assoluto in $j = i$ quando $t = D$. Il valore minimo $V(D,j)$. Il flusso si dice immunizzato al tempo $t = D$, cio in D il valore non pu scendere al di sotto di $V(t,i)$, noto gi al tempo 0. Nel seguente grafico rappresentata la funzione valore V, al tempo D, in funzione del tasso di valutazione j.

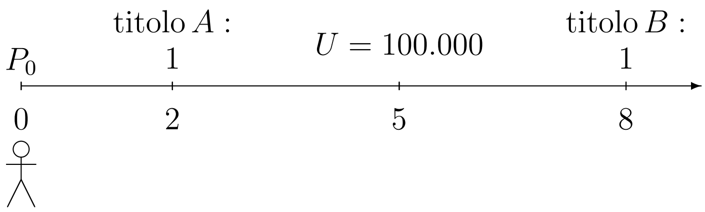


Vediamo come utilizzare questa propriet. Consideriamo un operatore finanziario che ha assunto un impegno per cui ad una data futura t^* deve pagare una somma U e che al momento attuale t=0 abbia disponibilit finanziarie da investire in modo da garantirsi U in t^*.



Se escludiamo il caso pi banale di disponibilit di ZCB con scadenza t^*, l'operatore investir in un portafoglio che al tempo 0 valga $U(1+i)^{-t^*}$, i il tasso di mercato al tempo 0, e che abbia duration pari a t^*. In tal modo, se si ha un cambiamento di tasso prima della prima scadenza di flusso, il portafoglio P (di copertura per l'uscita U) immunizzato ed in t^*, nella peggiore delle ipotesi, vale esattamente U. L'ipotesi che in tasso di modifichi una sola volta e prima della prima scadenza poco vincolante, dato che il portafoglio ad ogni scadenza potr essere ricalibrato in modo da risultare sempre immunizzato al tempo t^*.

Esempio. Consideriamo un investitore che il $t = 0$ voglia garantirsi il pagamento di 100.000 euro fra 5 anni. Supponiamo che il tasso di mercato sia $i = 0,075$ e che sul mercato siano disponibili solo titoli di puro sconto scadenti in $t = 2$ (titolo A) e $t = 8$ (titolo B) (titoli perfettamente divisibili). Costruiamo un portafoglio immunizzato rispetto a tale uscita prevista.



I prezzi al tempo 0 dei titoli sono:

$$P_A = (1 + 0,075)^{-2} \qquad P_B = (1 + 0,075)^{-8}.$$

Dobbiamo investire nei due titoli secondo le quantit x_A e x_B in modo che il portafoglio in 0 valga $100.000 \cdot (1 + 0,075)^{-5}$ e che abbia duration D_P pari a 5:

$$\begin{cases} P_0 = 100.000 \cdot 1,075^{-5} \\ D_P = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A\, 1,075^{-2} + x_B\, 1,075^{-8} = 100.000 \cdot 1,075^{-5} \\ \frac{2\, x_A\, 1,075^{-2} + 8\, x_B\, 1,075^{-8}}{P_0} = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A = 40.248,03 \\ x_B = 62.114,84 \end{cases}$$

Il portafoglio, se il tasso rimanesse $0,075$, al tempo 5 avrebbe ovviamente il valore di 100.000:

$$V(5; 0,075) = 40.248,03 \cdot 1,075^3 + 62.114,84 \cdot 1,075^{-3} = 100.000$$

Supponiamo che il tasso prima della scadenza del primo titolo passi da $i = 0,075$ a $j = 0,09$. Il portafoglio al tempo 5 avrebbe valore :

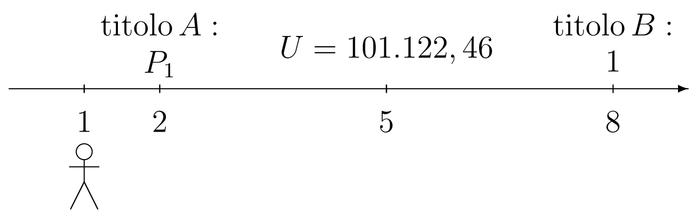
$$V(5; 0,09) = 40.248,03 \cdot 1,09^3 + 62.114,84 \cdot 1,09^{-3} = 100.086,42 > 100.000;$$

se invece il tasso dovesse diminuire, diventando ad esempio $j = 0,07$, il valore al tempo 5 del portafoglio sarebbe:

$$V(5; 0,07) = 40.248,03 \cdot 1,07^3 + 62.114,84 \cdot 1,07^{-3} = 100.009,78 > 100.000.$$

Se i cambiamenti avvengono prima della prima scadenza, in questo caso del tempo 2, il portafoglio immunizzato al tempo 5, per cui il suo valore non potr scendere al di sotto di 100.000.
Supponiamo di trovarci al tempo 1 e che il tasso sia il 13%: con tale tasso, la valutazione al tempo 5 risulter essere:

$$V(5; 0,13) = 40.248,03 \cdot 1,13^3 + 62.114,84 \cdot 1,13^{-3} = 101.122,46 > 100.000;$$



Ovviamente, lasciando immutato il portafoglio, non abbiamo nessuna garanzia che il valore non scenda al di sotto di questo valore. Se vogliamo garantirci questa nuova cifra, dobbiamo ricalibrare il portafoglio secondo la nuova situazione:

$$\begin{cases} P_1 = 101.122,46 \cdot 1,13^{-5} \\ D_P = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A\, 1,13^{-1} + x_B\, 1,13^{-7} = 101.122,46 \cdot 1,13^{-4} \\ \frac{2\, x_A\, 1,13^{-1} + 8\, x_B\, 1,13^{-7}}{P_1} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A = 5.041,47 \\ x_B = 72.954,65 \end{cases}$$

La tecnica dell'immunizzazione, anche in questo semplice caso con una sola uscita, richiede comunque una ricalibrazione del portafoglio una volta giunti alla scadenza di una entrata. Nel nostro semplice esempio, una volta arrivati alla scadenza 2, il portafoglio non risulter pi immunizzato rispetto a cambiamenti di tasso.